Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3

Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis

8° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3
Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um quadrilátero inscritível possui:

a) lados opostos congruentes.

b) soma das medidas de ângulos internos opostos suplementares.

c) ângulos internos consecutivos congruentes.

d) soma das medidas dos lados opostos iguais.

Exercício 2. Se a soma das medidas de lados opostos de um polígono é a mesma, então este polígono:

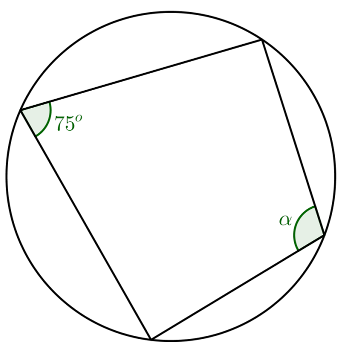
a) é um trapézio retângulo.

b) é um hexágono côncavo.

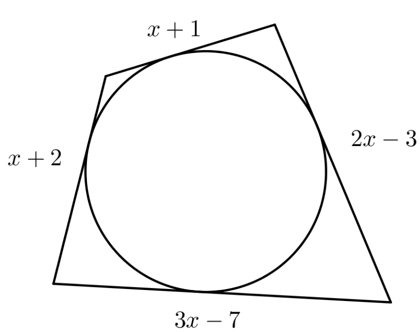
c) é um quadrilátero inscritível.

d) é um quadrilátero circunscritível.

Exercício 3. Determine o valor de α na figura.

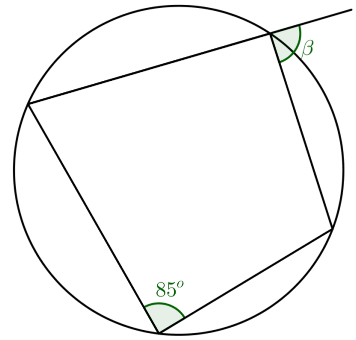


Exercício 4. Determine o valor de x no quadrilátero abaixo.



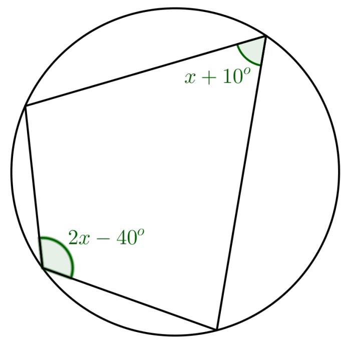
Exercício 5. Um quadrilátero circunscritível possui lados opostos medindo $3cm$, $4cm$, $5cm$ e x, sendo x a medida do lado oposto ao lado de medida $4cm$. Determine o valor de x.

Exercício 6. Determine o valor de β, na figura.



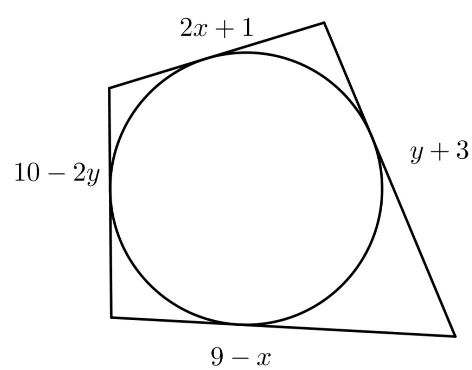
2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Determine o valor de x na figura.

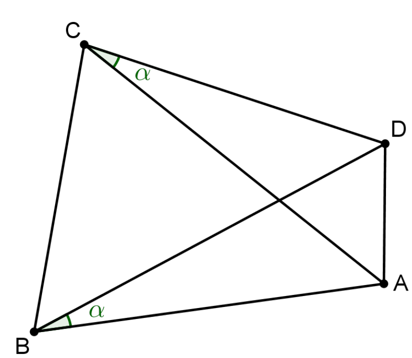


Exercício 8. Um trapézio isósceles qualquer é inscritível a uma circunferência?

Exercício 9. Determine o valor de $x+y$ no quadrilátero circunscritível da figura.



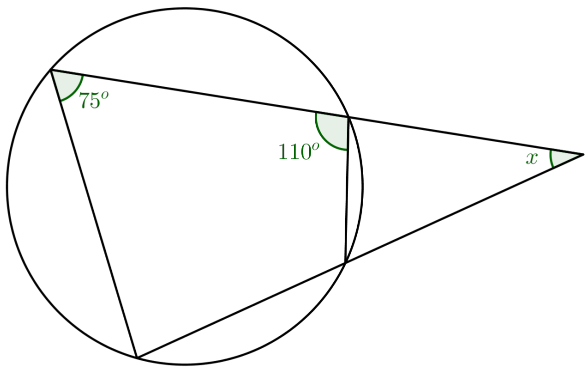
Exercício 10. O quadrilátero $ABCD$ da figura é inscritível. Justifique.



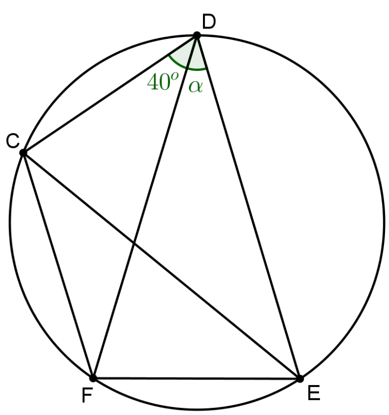
Exercício 11. As medidas de dois ângulos internos opostos de um quadrilátero inscritível são diretamente proporcionais a 2 e 3. Determine a medida de cada um destes dois ângulos.

Exercício 12. Seja uma triângulo retângulo, cujos lados medem $6cm$, $8cm$ e $10cm$. Determine a medida do raio inscrito ao triângulo.

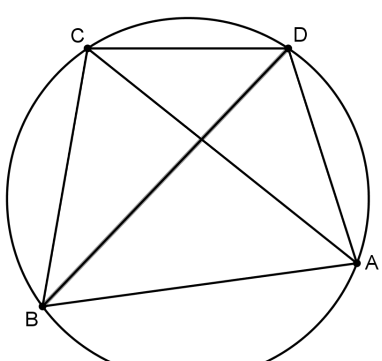
Exercício 13. Determine o valor de x na figura.



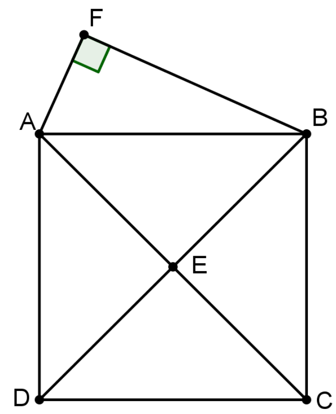
Exercício 14. Na figura, C, D, E, e F são pontos sobre uma circunferência. Além disso, $DF = DE$ e CE é bissetriz do ângulo $\angle DEF$. Determine $\angle CFE$.



Exercício 15. Em quadriláteros inscritíveis, o produto das medidas das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos lados opostos (Teorema de Ptolomeu), ou seja, em um quadrilátero $ABCD$, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

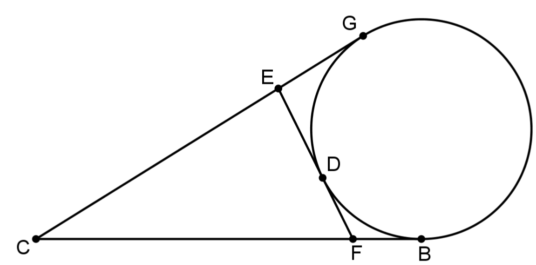


Na figura abaixo, temos um quadrado $ABCD$ de lado medindo $10cm$ e um triângulo retângulo de catetos medindo $8cm$ e $6cm$. Se a diagonal de um quadrado mede $\sqrt{2}$ vezes a medida do seu lado, determine a medida de EF.

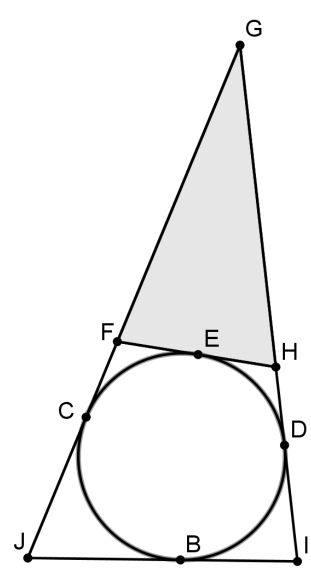


3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Na figura, CB, CG e EF são segmentos tangentes à circunferência nos pontos B, G e D, respectivamente. Se $CE = 10$, $CF = 9$ e $EF = 7$, determine a medida de $CB + CG$.



Exercício 17. Seja um triângulo JIG, onde $JI = 6$, $IG = 8$ e $GJ = 9$. Por F e H, pontos pertencentes aos lados GJ e IG, respectivamente, traça-se um segmento tangente à circunferência inscrita a JIG. Determine o perímetro do triângulo FHG.



Exercício 18. Numa circunferência, inscreve-se um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\angle ABC = 70^o$. Se $X = \angle ACB + \angle BDC$, então:

a) $X = 120^o$.

b) $X = 110^o$.

c) $X = 100^o$.

d) $X = 90^o$.

e) $X = 80^o$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. B

2. D.

3. Como o quadrilátero é inscritível, a soma de ângulos internos opostos é 180^o. Assim, $\alpha + 75^o = 180^o$, segue que $\alpha = 105^o$.

4. Como o quadrilátero é circunscritível, a soma das medidas dos lados opostos é a mesma, ou seja:

$$\begin{aligned} (x+1)+(3x-7) &= (x+2)+(2x-3) \\ 4x-6 &= 3x-1 \\ 4x-3x &= 6-1 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

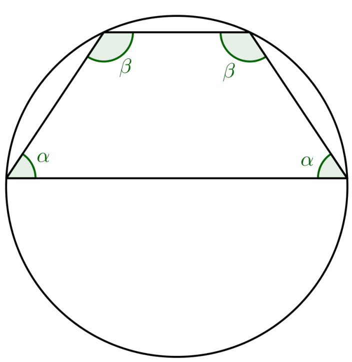
5. $x+4 = 3+5$, segue que $x = 4cm$.

6. Como o quadrilátero é inscritível, então a medida do ângulo externo relativo a um vértice é igual à medida do ângulo interno relativo ao vértice oposto ao primeiro, ou seja, $\beta = 85^o$.

7.

$$\begin{aligned} 2x - 40^o &= x + 10^o \\ 2x - x &= 40^o + 10^o \\ x &= 50^o. \end{aligned}$$

8. Uma propriedade de trapézios isósceles é que os ângulos internos de vértices de uma mesma base são congruentes. Observe a figura.

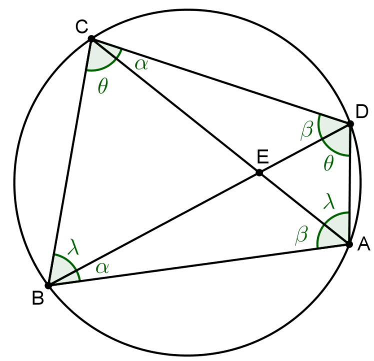


Sendo assim, como se trata de um quadrilátero, a soma das medidas dos ângulos internos é 360^o, ou seja, $2\alpha + 2\beta = 360^o$, segue que $\alpha + \beta = 180^o$. Como a soma das medidas dos ângulos internos opostos do quadrilátero é 180^o, então ele é inscritível.

9. Como o quadrilátero é circunscritível, temos:

$$\begin{aligned} (2x+1)+(9-x) &= (10-2y)+(y+3) \\ 2x-x+1+9 &= y-2y+10+3 \\ x+10 &= -y+13 \\ x+y &= 3. \end{aligned}$$

10. Vamos chamar de E a interseção das diagonais do quadrilátero. Como $\angle AEB$ e $\angle CED$ são opostos pelo vértice, eles são congruentes e, como consequência disso, os triângulos AEB e CED são semelhantes, sendo $\angle BAE = \angle CDE = \beta$. Se estes triângulos são semelhantes, então $\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{DE}{AE}$, e como $\angle AED \equiv \angle BED$ (opostos pelo vértice), os triângulos AED e BEC são semelhantes (LAL), sendo $\angle ADE = \angle BCE = \theta$ e $\angle DAE = \angle CBE = \lambda$. Somando as medidas dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$, temos $2\alpha + 2\beta + 2\theta + 2\lambda = 360^o$, segue que $\alpha + \beta + \theta + \lambda = 180^o$, que é a soma das medidas de dois ângulos internos opostos do quadrilátero $ABCD$, ou seja, o quadrilátero é inscritível.

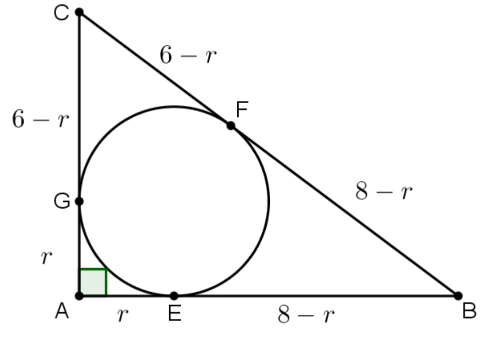


11. Como são ângulos internos opostos de um quadrilátero inscritível, então suas medidas somam 180^o. Chamando estes ângulos de α e β, temos:

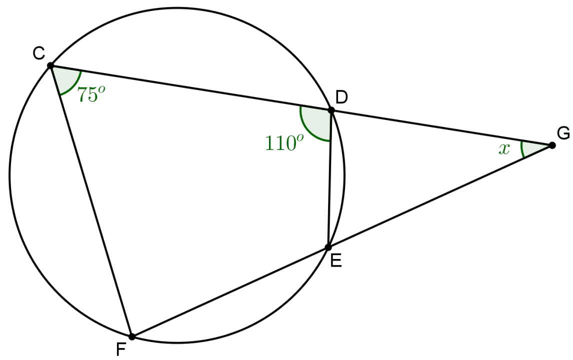
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha+\beta}{2+3} = \frac{180^o}{5} = 36^o.$$

Portanto, $\alpha = 2 \cdot 36^o = 72^o$ e $\beta = 3 \cdot 36^o = 108^o$.

12. Seja o triângulo ABC, retângulo em A, onde $AB = 8cm$, $AC = 6cm$ e $BC = 10cm$. Sejam também os pontos de tangência com a circunferência inscrita F, pertencente a BC, G, pertencente a AC e E, pertencente a AB. Como o triângulo é retângulo, os segmentos AE e AG possuem a mesma medida do raio r. Dessa forma, temos $BE = BF = 8-r$ e $CG = CF = 6-r$. Como $CB = 10cm$, então $CF + BF = 6-r+8-r = 10$, segue que $r = 2cm$.

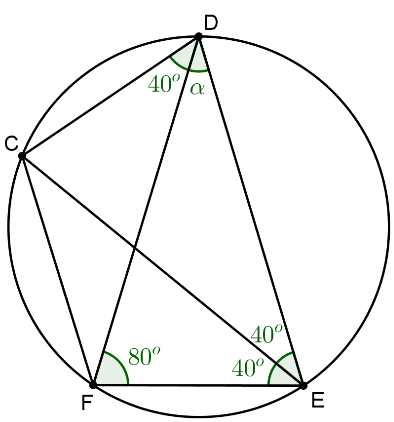


13. Nomeando os vértices do quadrilátero e do triângulo da figura, temos:



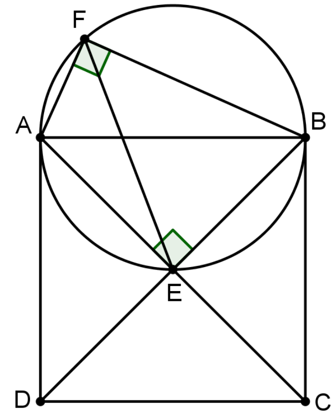
Como o quadrilátero $CDEF$ é inscritível, $\angle CDE + \angle EFC = 180^o$, segue que $\angle EFC = 70^o$. Analisando os ângulos internos do triângulo GFC, temos $x + 75^o + 70^o = 180^o$, segue que $x = 35^o$.

14. Como os ângulos $\angle CDF$ e $\angle CEF$ "olham" para o mesmo arco, eles são congruentes. Temos também que CE é bissetriz do ângulo $\angle DEF$ e, portanto, $\angle CED = \angle CEF = 40^o$. Assim, $\angle DEF = \angle DFE = 80^o$, pois $DF = DE$, e, consequentemente, $\alpha = 180^o - 80^o - 80^o = 20^o$. Por fim, se o quadrilátero $CDEF$ é inscritível, $\angle CFE = 180^o - 40^o - 20^o = 120^o$.



15. Se as diagonais de um quadrado são perpendiculares, então $\angle AFB + \angle AEB = 90^o + 90^o = 180^o$ e, consequentemente, o quadrado $AEBF$ é inscritível. Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos:

$$\begin{aligned} EF \cdot 10 &= 6 \cdot 5\sqrt{2} + 8 \cdot 5\sqrt{2} \\ EF \cdot 10 &= 30\sqrt{2} + 40\sqrt{2} \\ EF \cdot 10 &= 70\sqrt{2} \\ EF &= 7\sqrt{2}cm. \end{aligned}$$

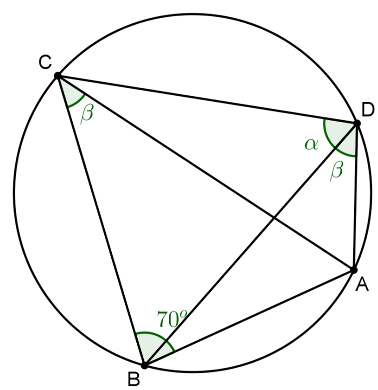


16. (Extraído da Vídeo Aula) Como os segmentos FD e FB são tangentes à circunferência, então $FD = FB$. Da mesma forma, $ED = EG$. Portanto:

$$\begin{aligned} CB + CG &= (CE + EG) + (CF + FB) \\ &= (CE + ED) + (CF + FD) \\ &= CE + CF + (ED + FD) \\ &= CE + CF + EF \\ &= 10 + 9 + 7 \\ &= 26. \end{aligned}$$

17. (Extraído da Vídeo Aula) Se $JB = JC$, $IB = ID$ e $JI = 6$, então $JC + ID = JB + IB = JI = 6$. Assim, $GC + GD = (GJ - JC) + (GI - ID) = 9 + 8 - 6 = 11$. Temos também que $FC = FE$ e $DH = HE$, que implica $GC + GD = (GF + FC) + (GH + DH) = (GF + FE) + (GH + HE) = GF + GH + FH = 11$, ou seja, o perímetro do triângulo FHG é 11.

18. (Extraído do ITA) Se o quadrilátero é inscritível, então $\angle ACB = \angle BDA$ e $70^o + \angle ADC = 180^o$, segue que $\angle ADC = 110^o$. Temos assim, $X = \angle ACB + \angle BDC = \angle BDA + \angle BDC = \angle ADC = 110^o$. Resposta B.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com