Módulo de Elementos básicos de geometria plana

Ângulos

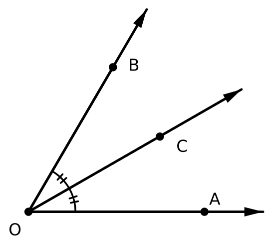
Oitavo Ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

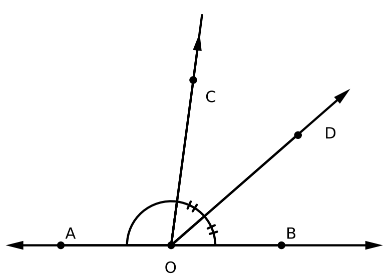
Ângulos

1 Exercícios Introdutórios

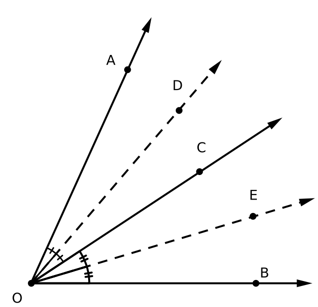
Exercício 1. *No desenho abaixo, OC é bissetriz do ângulo $\angle AOB$. Se $\angle AOC = 2x - 5°$ e $\angle COB = x + 3°$, quanto vale x?*



Exercício 2. *No desenho abaixo, A, O e B são colinares e OD é bissetriz do ângulo $\angle BOC$. Além disso, $\angle BOD = x + 10°$, $\angle DOC = y + 5°$, $\angle COA = 3y$. Determine os valores de x e y.*



Exercício 3. *No desenho abaixo, OE e OD são bissetrizes dos ângulos $\angle BOC$ e $\angle COA$, respectivamente. Se o ângulo $\angle AOB$ mede $70°$, determine a medida do ângulo $\angle DOE$*



Exercício 4. *Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F):*

a) Dois ângulos consecutivos são adjacentes.

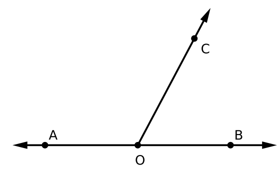
b) Dois ângulos opostos pelo vértice são adjacentes.

c) Dois ângulos suplementares são adjacentes.

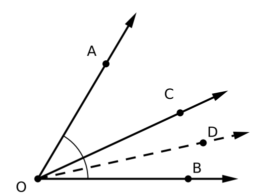
d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.

e) Dois ângulos opostos pelo vértice não são consecutivos.

Exercício 5. *Na figura abaixo, temos $\angle BOC = 3x + 5°$ e $\angle AOC = 2x - 5°$. Sabendo que A, O e B são colineares, determine o valor do ângulo x.*

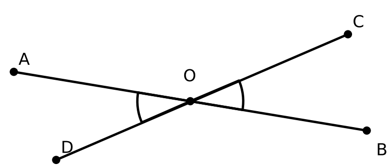


Exercício 6. *Na figura abaixo, $\angle AOC = 2\angle BOC$. Se $\angle AOB = 60°$, determine o valor do ângulo formado entre a bissetriz OD de $\angle BOC$ e a semirreta OA.*

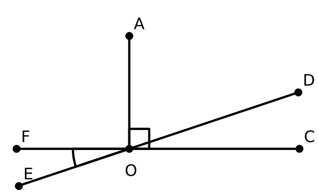


Exercício 7. *A soma de dois ângulos é $140°$. Um deles é o quádruplo do outro subtraído de $40°$. Determine os dois ângulos.*

Exercício 8. *Duas retas se encontram em O como indica a figura abaixo. Se $\angle AOD = 2x + 10°$ e $\angle COB = 50°$, determine o valor de x.*



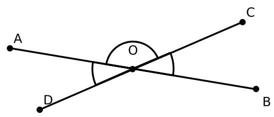
Exercício 9. *No desenho abaixo, $\angle AOD = 55°$. Determine o valor do ângulo $\angle EOF$.*



Exercício 10. *Um ângulo reto foi dividido em três ângulos adjacentes cujas medidas são proporcionais aos números 2, 3 e 4. Determine os valores desses ângulos.*

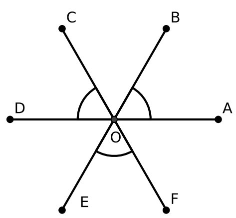
Exercício 11. *Os ângulos x e y são complementares e $x - y = 10°$. Qual o valor de x?*

Exercício 12. *Na figura abaixo,* $\angle AOD = 3x + 10^\circ$ *e* $\angle COB = 2x + 20^\circ$*. Determine o ângulo* $\angle AOC$*,*



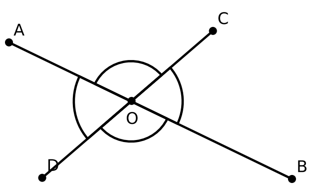
Exercício 13. *Determine a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes que somam* 150°*.*

Exercício 14. *No desenho abaixo,* $\angle AOB = \angle COD = \angle EOF = x$*. Determine o valor de* x*.*



Exercício 15. *Duas retas são concorrentes em um ponto* O*. Quantos ângulos distintos ficam determinados por elas no plano que as contém?*

Exercício 16. *No desenho abaixo, os segmentos* AB *e* CD *determinam quatro ângulos. Determine os valores de* x*,* y *e* z *em cada um dos casos abaixo:*



a) $\angle COB = 80^\circ$, $\angle DOB = x + y$, $\angle CAO = y + z$ e $\angle DAO = x + z$.

b) $\angle COB = x + 40^\circ$, $\angle DOB = 3x + 20^\circ$ e $\angle AOC = z$.

Exercício 17. *Simplifique as seguintes medidas como no modelo:*

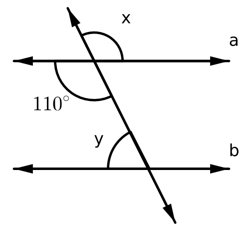
$$\begin{aligned} 1^\circ 58' 237'' &= 1^\circ 58' 57'' + 180'' \\ &= 1^\circ 61' 57'' \\ &= 1^\circ 01' 57'' + 60' \\ &= 2^\circ 01' 57''. \end{aligned}$$

a) $35^\circ 150'$.

b) $50^\circ 130'$.

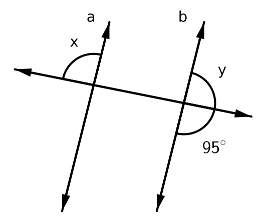
c) $75^\circ 20' 137''$.

d) $58^\circ 58' 260''$.

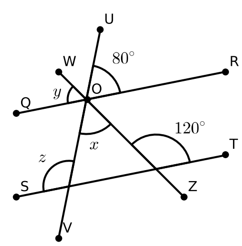


Exercício 18. *No desenho abaixo, as retas* a *e* b *são paralelas. Determine os valores de* x *e* y*.*

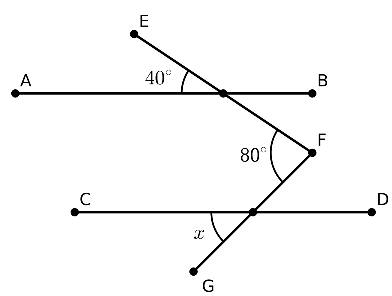
Exercício 19. *No desenho abaixo, as retas* a *e* b *são paralelas. Determine os valores de* x *e* y*.*



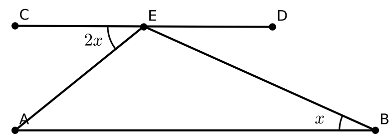
Exercício 20. *No desenho abaixo, os segmentos* QR *e* ST *são paralelos. Determine os valores dos ângulos* x*,* y *e* z*.*



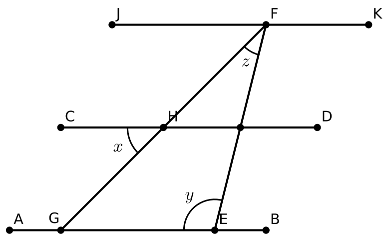
Exercício 21. *No desenho abaixo, os segmentos* AB *e* CD *são paralelos. Determine a medida do ângulo* x*.*



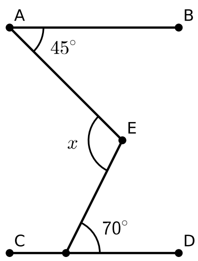
Exercício 22. *No desenho abaixo,* CD *e* AB *são segmentos paralelos. Se* $\angle AEB = 105^\circ$*, determine a medida do ângulo* x*.*



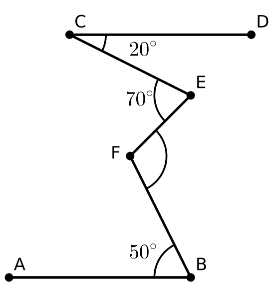
Exercício 23. *Na figura abaixo, JK, CD e AB são segmentos paralelos. Se $x + y = 150°$, determine o valor do ângulo z*



Exercício 24. *No desenho abaixo, AB e CD são paralelos. Determine o valor do ângulo x.*



Exercício 25. *Na figura abaixo, os segmentos CD e AB são paralelos. Determine o valor do ângulo $\angle EFB$*



Exercício 26. *Efetue as operações indicadas:*

a) $90° - 55°37'$.

b) $3 \times (7°13'23'')$.

c) $(46°38'28'') \div 2$.

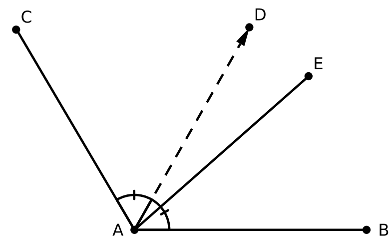
d) $87°27'12'' + 5°34'48''$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 27. *Qual o ângulo formado entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares?*

Exercício 28. *A diferença entre dois ângulos adjacentes mas não consecutivos é $100°$. Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.*

Exercício 29. *No desenho abaixo, DA é bissetriz do ângulo $\angle CAB$. Determine o valor do ângulo $\angle DAE$ sabendo que $\angle CAB + \angle EAB = 120°$ e $\angle CAB - \angle EAB = 80°$.*



Exercício 30. *Os ângulos x e y são tais que sua diferença é $20°$. Encontre x sabendo que seu complementar somado com o suplementar de $2x$ é o dobro do complemento de y.*

Exercício 31. *Encontre algum ângulo x tal que o seu quadrado excede em $50°$ o quíntuplo do seu complemento.*

Exercício 32. *A soma dos complementos de x e y é igual $\dfrac{1}{10}$ da soma de seus suplementares. Se um deles é o quádruplo do outro, determine o menor deles.*

Exercício 33. *A que horas pela primeira vez após o meio-dia, os ponteiros de um relógio formam $110°$?*

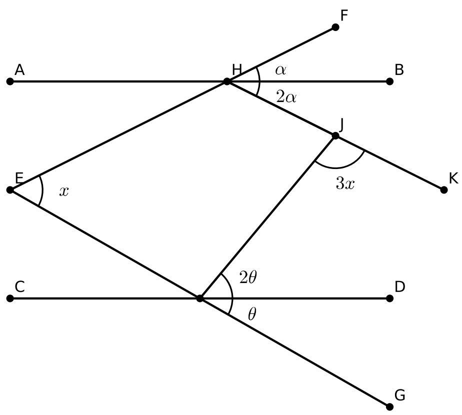
$a)12h18'$ $\quad b)12h20'$ $\quad c)13h22'$ $\quad d)13h23'$ $\quad e)15h$

Exercício 34. *Dois ângulos suplementares medem $3x - 40°$ e $2x + 60°$. Qual o valor do maior desses ângulos?*
$a)56°$ $\quad b)108°$ $\quad c)124°$ $\quad d)132°$ $\quad e)137°$

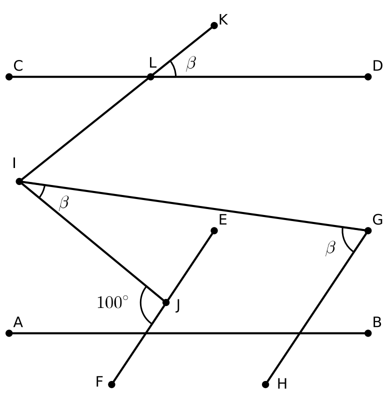
Exercício 35. *Efetuando $55°15'37'' - 20°42'30''$, temos:*
$a)34°28'7''$ $\quad b)34°33'7''$ $\quad c)33°28'7''$
$d)33°33'7''$ $\quad e)35°28'7''$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

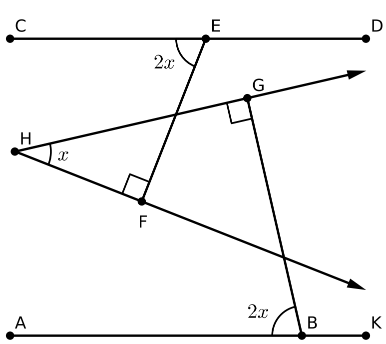
Exercício 36. *Sabendo que AB é paralelo a CD, determine a medida do ângulo x.*



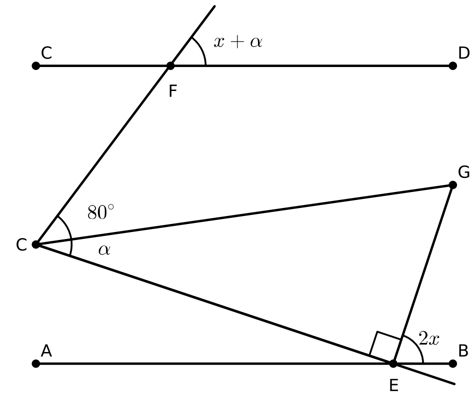
Exercício 37. *Na figura abaixo, $CD \parallel AB$ e $GH \parallel EF$. Determine a medida do ângulo β.*



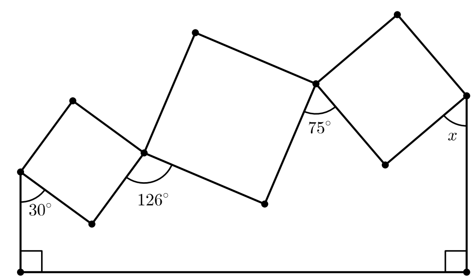
Exercício 38. *Sabendo que CD e AK são paralelos, determine o valor de x.*



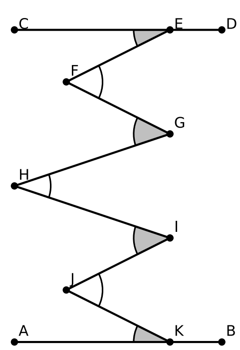
Exercício 39. *Sabendo que CD é paralelo a AB, determine o ângulo x.*



Exercício 40. *Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura. Determine a medida do ângulo x.*



Exercício 41. *No desenho abaixo, mostre que a soma dos ângulos ângulos brancos é igual à soma dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de "bicos" no desenho e o chamamos popularmente como Teorema dos Bicos.*



Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. *Como OC é bissetriz, $2x - 5 = x + 3$ e daí $x = 8°$.*

2. *Temos:*

$$\begin{aligned} 180° &= \angle AOC + \angle COD + \angle DOB \\ &= \angle AOC + 2\angle COD \\ &= 3y + (2y + 10) \\ &= 5y + 10. \end{aligned}$$

Portanto, $y = 34°$. Como

$$39° = \angle COD = \angle DOB = x + 10°,$$

temos $x = 29°$.

3. *Sejam $\angle AOC = 2x$ e $\angle COB = 2y$. Temos:*

$$\angle DOE = x + y = \frac{2x + 2y}{2} = \frac{\angle AOB}{2} = 35°.$$

4. *Apenas D e E são verdadeiras.*

5. *Como $180° = \angle BOC + \angle AOC = 5x$, segue que $x = 36°$.*

6. *Seja $\angle BOC = 2x$, então $\angle AOC = 2\angle BOC = 4x$. Como $60° = \angle AOC + \angle BOC = 6x$, segue que $x = 10°$. Portanto, $\angle DOA = \angle DOC + \angle COA = x + 4x = 50°$.*

7. *Os ângulos são x e $4x - 40°$. Assim, $140° = 5x - 40°$ e $x = 36°$. Os ângulos são $36°$ e $104°$.*

8. *Temos $2x + 10° = \angle AOD = \angle COB = 50°$ pois eles são opostos pelo vértice. Consequentemente, $x = 20°$.*

9. *Temos $\angle AOD + \angle DOC = 90°$ e consequentemente $\angle DOC = 35°$. Como $\angle FOE$ e $\angle DOC$ são opostos pelo vértice, temos $\angle FOE = 35°$.*

10. *A divisão determina os ângulos $2x$, $3x$ e $4x$. Somando-os, temos $90° = 9x$. Portanto, $x = 10°$ e os ângulos são $20°$, $30°$ e $40°$.*

11. *Como $x + y = 90°$ e $x - y = 10°$, somando e subtraindo as duas equações, temos $x = \dfrac{90° + 10°}{2} = 50°$ e $y = \dfrac{90° - 10°}{2} = 40°$.*

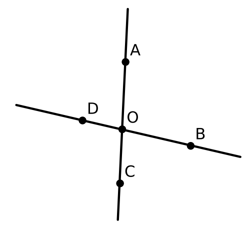
12. *Como os ângulos $\angle AOD$ e $\angle COB$ são opostos pelo vértice, temos $3x+10° = 2x+20°$, ou seja, $x = 10°$. Como $\angle AOC$ e $\angle COB$ são suplementares, obtemos $\angle AOC = 180° - (2x + 20°) = 140°$.*

13. *Sejam $2x$ e $2y$ as medidas dos ângulos adjacentes. O ângulo entre as bissetrizes é*

$$x + y = \frac{2x + 2y}{2} = \frac{150°}{2} = 75°.$$

14. *Como os ângulo $\angle BOC$, $\angle DOE$ e $\angle AOF$ são opostos pelo vértice aos ângulos $\angle EOF$, $\angle AOB$, $\angle COD$, respectivamente, temos $360° = 6x$ e consequentemente $x = 60°$.*

15. *As duas retas determinam quatro semirretas: OA, OB, OC e OD. Todos os ângulos são determinados pelas combinações de duas delas. Como existem 6 maneiras de escolhermos duas delas - (OA, OB), (OA, OC), (OA, OD), (OB, OC), (OB, OD) e (OC, OD) - ficam determinados 6 ângulos.*



a) $\angle COB = 80°$, $\angle DOB = x + y$, $\angle CAO = y + z$ e $\angle DAO = x + z$.

b) $\angle COB = x + 40°$, $\angle DOB = 3x + 20°$ e $\angle AOC = z$.

16. *a) Como $\angle COB = 80°$, temos $x + y = \angle DOB = 180° - 80° = 100°$. Além disso, como ângulos opostos pelo vértice possuem mesma medida, temos $x + z = 80°$ e $y + z = \angle DOB = 100°$. Resolvendo o sistema produzido por essas três equações, encontramos $x = 40°$, $y = 60°$ e $z = 40°$.*

b) Temos $(3x+20°)+(x+40°) = \angle DOB+\angle BOC = 180°$. Assim, $x = 30°$. Além disso, $z = \angle AOC = \angle DOB = 3x + 20° = 110°$.

17. *a) $37°30'$.*

b) $52°10'$.

c) $75°22'17''$.

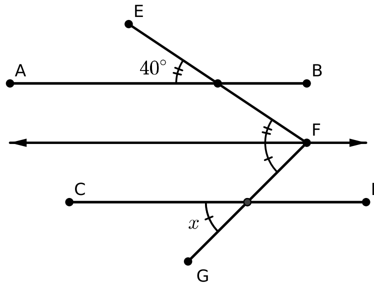
d) $59°02'20''$.

18. *Temos $x = 110°$ pois ângulos opostos pelo vértice possuem igual medida. Como os ângulos de medidas $110°$ e y são colaterais internos, temos $y = 180° - 110° = 70°$.*

19. *Temos $x = 95°$ pois os ângulos com tais medidas são alternos externos. Além disso, $y = 180° - 95° = 85°$.*

20. *Como ângulos correspondentes são iguais, temos $y = 180° - 120° = 60°$ e $z = 180° - 80° = 100°$. Analisando agora os três ângulos marcados no vértice O que formam um ângulo raso, temos $x+y+80° = 180°$, ou seja, $x = 40°$.*

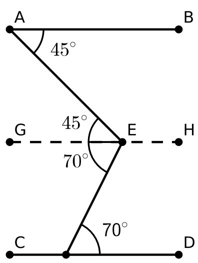
21. *Trace pelo ponto F uma reta paralela ao segmento AB. Os pares de ângulos marcados com os mesmos símbolos são iguais pois são correspondentes. Portanto, $80° = x + 40°$ e consequentemente $x = 40°$.*



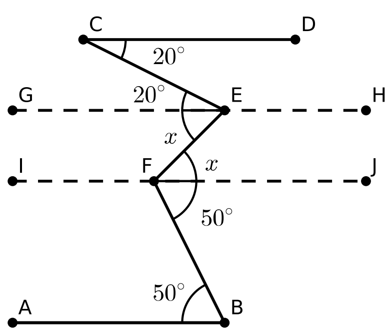
22. *Segue do paralelismo que* $\angle BED = \angle EBA = x$*. Somando agora os ângulos marcados no vértice* E *que formam um ângulo raso, temos:* $2x + 105° + x = 180°$*. Assim,* $x = 25°$*.*

23. *Do paralelismo segue que* $\angle JFH = \angle CHG = x$ *e* $\angle KFE = \angle FEA = y$*. Portanto,* $180° = x + y + z = 150° + z$*. Daí,* $z = 30°$*.*

24. *Pelo ponto* E*, trace uma paralela a* AB*. O ângulo* x *será então formado por dois ângulos que são alternos internos aos ângulos que medem* $45°$ *e* $70°$*. Portanto,* $x = 115°$*.*



25. *Repitamos o procedimento do exercício anterior traçando retas paralelas a* AB *pelos pontos* E *e* F *como indica a figura abaixo.*



Teremos inicialmente $70° = x + 50°$*, ou seja,* $x = 20°$*. Além disso,* $\angle EFB = x + 50° = 100°$*.*

26. *a)* $34°23'$.

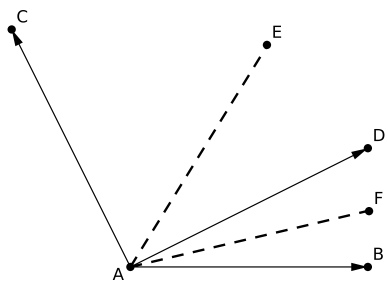
b) $21°40'09''$.

c) $23°19'14''$.

d) $93°02'$

2 Exercícios de Fixação

27. *O ângulo entre as bissetrizes corresponde a soma da medade de cada um dos ângulos originais, ou seja,* $\dfrac{180°}{2} = 90°$*.*



28. *Sejam* $\angle BAD = 2x$ *e* $\angle BAC = 2y$ *os ângulos adjacentes. O ângulo entre as bissetrizes é*

$$y - x = \frac{\angle BAC - \angle BAD}{2} = \frac{100°}{2} = 50°.$$

29. *Sejam* $x = \angle CAD = \angle DAB$ *e* $y = \angle EAB$*. Então* $2x + y = 120°$ *e* $2x - y = 80°$*. Portanto,*

$$\angle DAE = x - y = 50° - 20° = 30°.$$

30. *Temos* $x - y = 20°$*. Além disso,* $(90° - x) + (180° - 2x) = 2(90° - y)$*, ou seja,* $3x - 2y = 90°$*. Resolvendo o sistema produzido pelas duas últimas equações, obtemos* $x = 50°$ *e* $y = 30°$*.*

31. *Devemos encontrar* x *tal que:*

$$\begin{aligned} x^2 - 50° &= 5(90° - x) \\ x^2 + 5x &= 500 \\ x(x + 5°) &= 20 \cdot 25°. \end{aligned}$$

Uma solução seria $x = 20°$*.*

32. *Suponhamos que* $y = 4x$*. Assim,*

$$\begin{aligned} (90° - x) + (90° - 4x) &= \frac{(180° - x) + (180° - 4x)}{10} \\ 1800° - 50x &= 360° - 5x \\ 1440° &= 45x \\ 32° &= x. \end{aligned}$$

33. *B)*

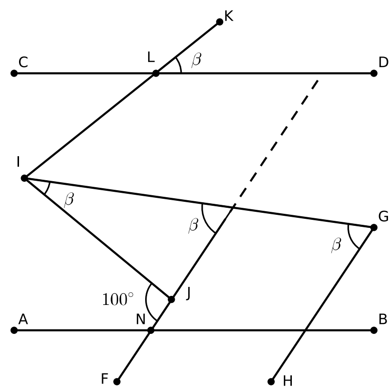
34. *Como* $180° = (3x - 40°) + (2x + 60°) = 5x + 20°$*, segue que* $x = 32°$ *e o maior dos ângulos vale* $124°$*.*

35. *Resposta B.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

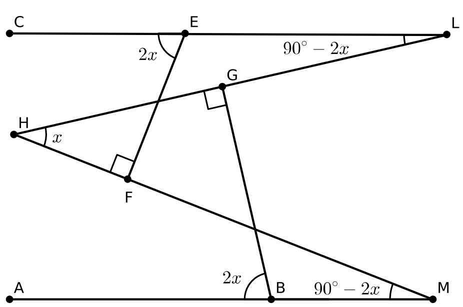
36. *Pelo Teorema dos Bicos(veja o último exercício) aplicado à linha poligonal que passa por E, temos $x = \alpha + \theta$. Aplicando-o novamente, agora à linha poligonal que passa por J, temos $180° - 3x = 2\alpha + 2\theta$. Assim, $180° - 3x = 2x$, ou seja, $x = 36°$.*

37. *Prolongue a reta JE. Do paralelismo obtemos um outro ângulo β como indica a figura abaixo.*



Pelo Teorema do ângulo externo, temos que $2\beta = 100°$, ou seja, $\beta = 50°$.

38. *Prolongue HG e HF até encontrarem CD e AB. Pelo Teorema dos Bicos aplicado à poligonal que passa pelos vértices F e G, podemos concluir que tais prolongamentos formam ângulos de $90° - 2x$ com esses segmentos. Aplicado agora o Teorema dos Bicos à linha poligonal que passa por H, podemos concluir que $x = (90° - 2x) + (90° - 2x)$. Assim, $x = 36°$.*



39. *Apliquemos o Teorema dos Bicos à linha poligonal que passa pelo vértice C. Os ângulos incidentes em F e E valem $x + \alpha$ e $90° - 2x$. Portanto,*

$$80° + \alpha = (x + \alpha) + (90° - 2x).$$

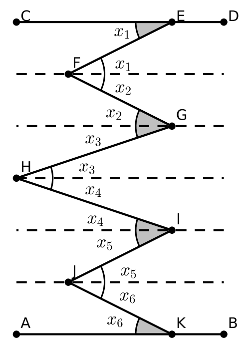
Consequentemente $x = 10°$.

40. *(Extraído da Prova da OBM 2006) Como os dois bastões verticais são paralelos, podemos aplicar o Teorema dos Bicos(veja último exercício) no caminho poligonal formado pelos lados dos quadrados que contém os ângulos marcados obtendo:*

$$30° + 126° + 75° + x = 90° + 90° + 90°.$$

Assim, $x = 39°$.

41. *Por cada um dos vértices dos "bicos", trace uma paralela ao segmento AB. Vários pares de ângulos alternos internos serão formados como indica a figura abaixo:*



Cada um dos ângulos marcados possui exatamente um representante entre os ângulos brancos e pretos. Assim, cada uma dessas somas de ângulos vale $x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.