Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Inversão

Tópicos Adicionais

Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria
Inversão

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^{-1}(28,11) = (a,b)$ determine $a+b$.

Exercício 2. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^{-1}(46,13) = (a,b)$, determine $a+b$.

Exercício 3. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^{-1}(68,15) = (a,b)$ determine $a+b$.

Exercício 4. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & b \\ -1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 5. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & b \\ -1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 6. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 22 & 43 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & b \\ -1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 7. Se $T^{-1}(28,11) = (1,5)$ e $T(2,10) = (a,b)$, determine o valor de b.

Exercício 8. Se $T^{-1}(53,15) = (1,7)$ e $T(3,21) = (a,b)$, determine o valor de b.

Exercício 9. Se $T^{-1}(104,23) = (1,11)$ e $T(4,44) = (a,b)$, determine o valor de b.

Exercício 10. Se $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T(1,1) = (a,b)$, determine o valor de $a+b$.

Exercício 11. Se $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T(1,1) = (a,b)$, determine o valor de $a+b$.

Exercício 12. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(4,1) = (1,0)$, $T(1,1) = (0,1)$ e $T^{-1}(4,7) = (a,b)$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 13. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(5,1) = (1,0)$, $T(1,1) = (0,1)$ e $T^{-1}(5,8) = (a,b)$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 14. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(6,1) = (1,0)$, $T(1,1) = (0,1)$ e $T^{-1}(6,9) = (a,b)$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 15. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(2,1) = (2,1)$, $T(1,1) = (7,0)$ e $T^{-1}(11,2) = (a,b)$, determine o valor de $a+b$.

Exercício 16. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(3,1) = (2,2)$, $T(1,1) = (8,0)$ e $T^{-1}(14,6) = (a,b)$, determine o valor de $a+b$.

Exercício 17. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(4,1) = (2,3)$, $T(1,1) = (9,0)$ e $T^{-1}(17,12) = (a,b)$, determine o valor de $a+b$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 18. Se $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T(1,1) = (a,b)$, determine o valor de $a+b$.

Exercício 19. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(x,y) = (2x,3y)$, determine a área do triângulo formado pelas imagens dos pontos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$.

Exercício 20. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(x,y) = (x+y, 2x+2y)$, determine a área do triângulo formado pelas imagens dos pontos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$.

Exercício 21. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(x,y) = (x+y, y)$, determine a área do triângulo formado pelas imagens dos pontos $A = T^{-1}(0,0)$, $B = T^{-1}(1,0)$ e $C = T^{-1}(0,1)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 22. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear invertível e sejam S e U funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tais que

$S(T(x)) = U(T(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Mostre que $U(v) = S(v)$ para todo v em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 23. Sejam A e B são duas matrizes quadradas satisfazendo $BA = I$. Prove que $AB = I$.

Exercício 24. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definida por $a_{ij} = 0$ se $i = j$ e 1 se $i \neq j$. Determine a inversa de A. Dica: Defina $A + I = M$ e prove que existem α e β tais que $A^{-1} = \alpha I + \beta M$.

Exercício 25. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se AB for invertível, então A também será.

Exercício 26. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e sejam a e b números reais tais que

$$T^2(v) + aT(v) + bv = 0$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Se $b \neq 0$, verifique que T possui uma inversa.

Exercício 27. Dizemos que uma transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ é indepotente se $T^2 = T$. Verifique que se uma transformação linear T é indepotente e invertível, então $T = I$.

Exercício 28. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se N é a transformação $T - I$, em que I é a transformação identidade, verifique que T admite uma inversa e que

$$T^{-1} = N^2 - N + I.$$

Exercício 29. Se $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que T^{r+1} é identicamente nula para algum inteiro positivo r, então mostre que $I - T$ é uma transformação inversível e que sua inversa é dada por $I + T + T^2 + \ldots + T^r$.

Respostas e Soluções.

1. Temos $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Portanto, $T^{-1}(28,11) = (1,5)$ e $a+b = 1+5$.

2. Temos $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Portanto, $T^{-1}(46,13) = (1,6)$ e $a+b = 1+6$.

3. Temos $T^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Portanto, $T^{-1}(68,15) = (1,7)$ e $a+b = 1+7$.

4. A inversa da matriz associada a transformação T é $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Portanto, $a-b = 8$.

5. A inversa da matriz associada a transformação T é $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Portanto $a-b = 11$.

6. A inversa da matriz associada a transformação T é $\begin{pmatrix} 2 & -43 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$. Portanto, $a-b = 65$.

7. Temos $T(2,10) = 2 \cdot T(1,5) = 2 \cdot (28,11) = (56,22)$. Portanto, $b = 22$.

8. Temos $T(3,21) = 3 \cdot T(1,7) = 3 \cdot (53,15) = (159,45)$. Portanto, $b = 45$.

9. Temos $T(4,44) = 4 \cdot T(1,11) = 4 \cdot (104,23) = (416,92)$. Portanto, $b = 92$.

10. Temos $T(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Portanto $T(1,1) = (8,3)$ e $a+b = 11$.

11. Temos $T(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Portanto, $T(1,1) = (11,3)$ e $a+b = 14$.

12. Temos $T^{-1}(4,7) = 4T^{-1}(1,0) + 7T^{-1}(0,1) = 4(4,1) + 7(1,1)$. Daí $(a,b) = (23,11)$ e $a-b = 12$.

13. Temos $T^{-1}(5,8) = 5T^{-1}(1,0) + 8T^{-1}(0,1) = 5(5,1) + 8(1,1)$. Daí $(a,b) = (33,13)$ e $a-b = 20$.

14. Temos $T^{-1}(6,9) = 6T^{-1}(1,0) + 9T^{-1}(0,1) = 6(6,1) + 9(1,1)$. Daí $(a,b) = (45,15)$ e $a-b = 30$.

15. Temos $T^{-1}(11,2) = 2T^{-1}(2,1) + T^{-1}(7,0) = 2(2,1) + (1,1)$. Portanto $(a,b) = (5,3)$ e $a+b = 8$.

16. Temos $T^{-1}(14,6) = 3T^{-1}(2,2) + T^{-1}(8,0) = 3(3,1) + (1,1)$. Portanto, $(a,b) = (10,4)$ e $a+b = 14$.

17. Temos $T^{-1}(17,12) = 4T^{-1}(2,3) + T^{-1}(9,0) = 4(4,1) + (1,1)$. Portanto, $(a,b) = (17,5)$ e $a+b = 22$.

18. Temos $T(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Portanto $T(1,1) = (14,3)$ e $a+b = 17$.

19. Como $T(0,0) = (0,0)$, $T(1,0) = (2,0)$ e $T(0,1) = (0,3)$, segue que a área do triângulo ABC é $\dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3$.

20. Como $T(0,0) = (0,0)$, $T(1,0) = (1,2)$ e $T(0,1) = (1,2)$, os três pontos A, B e C estão no segmento que une $(0,0)$ e $(1,2)$. A área desse triângulo degenerado é 0.

21. Como $T^{-1}(0,0) = (0,0)$, $T^{-1}(1,0) = (1,0)$ e $T^{-1}(0,1) = (-1,1)$, segue a área do triângulo ABC é $\dfrac{1 \cdot 1}{2} = 0,5$.

22. Dado $v \in \mathbb{R}^2$, faça $x = T^{-1}(v)$. Daí

$$\begin{aligned} S(v) &= S(T(T^{-1}(y))) \\ &= U(T(T^{-1}(y))) \\ &= U(v) \end{aligned}$$

Isso nos permitirá concluir que a inversa de T é única.

23. Temos

$$\begin{aligned} A(BA) &= AI \\ (AB)A &= A \end{aligned}$$

Como I é a única matriz que multiplicada por A tem como resultado A, segue que $AB = I$.

24. Como $M^2 = n \cdot M$, segue que

$$\begin{aligned} M^2 - I - n \cdot M + n \cdot I &= (n-1) \cdot I \\ (M-I)(M+I-n \cdot I) &= (n-1)I \\ A\left(\frac{1}{n-1} \cdot M - I\right) &= I. \end{aligned}$$

Portanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1} \cdot M - I$.

25. Como AB é invertível, existe uma matriz W tal que $ABW = I$. Consequentemente a matriz BW é a inversa de A.

26. Da equação dada, podemos concluir que

$$\begin{aligned} T^2 + aT &= -bI \\ \frac{-1}{b} \cdot T \circ (T + aI) &= I. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{-1}{b} \cdot (T + aI)$$

é a inversa de T.

27. De $T^2 = T$ temos

$$\begin{aligned} T &= T^{-1} \circ T^2 \\ &= T^{-1} \circ T \\ &= I. \end{aligned}$$

28. Como $N(x, y, z) = (2y + 3z, 2z, 0)$, segue que $N^2(x, y, z) = (4z, 0, 0)$ e $N^3(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Assim

$$\begin{aligned} N^3 + I &= I \\ (N + I) \circ (N^2 - N + I) &= I \end{aligned}$$

Daí $T = N + I$ é a inversa de $N^2 - N + I$.

29. Temos

$$\begin{aligned} I &= I - T^{r+1} \\ &= (I - T) \circ (I + T + T^2 + \ldots + T^r) \end{aligned}$$

Portanto, $I - T$ é inversível e sua inversa é $I + T + T^2 + \ldots + T^r$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com