Módulo de Equações e Sistemas de Equações Fracionárias

Sistema de Equações Fracionárias.

8^o **ano/**7^a **série E.F.**

Equações e Sistemas de Equações Fracionárias
Sistema de Equações Fracionárias.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + 3y & = & 6 \\ \dfrac{2}{x} - 5y & = & 1. \end{cases}$$

Exercício 2. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y} & = & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{x-y} & = & -2. \end{cases}$$

Exercício 3. Encontre todos os pares (x, y) tais que

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} & = & -\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{y} & = & 9. \end{cases}$$

Exercício 4. Determine as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} & = & 1 \\ \dfrac{12}{y} - \dfrac{3}{x} & = & 5 \end{cases}$$

Exercício 5. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} & = & -18 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} & = & -7. \end{cases}$$

Exercício 6. Encontre todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - 3 & = & \dfrac{2}{y} \\ 2x - 9y & = & -8. \end{cases}$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Encontre as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} & = & 11 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} & = & 12 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} & = & 13 \end{cases}$$

Exercício 8. Se x e y são números não nulos tais que $x = 1 + \dfrac{1}{y}$ e $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, então y é igual à:
a) $x - 1$ b) $1 - x$ c) $1 + x$ d) $-x$ e) x.

Exercício 9. Calcule $\dfrac{x}{y}$ se

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} & = & 4 \\ y + \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Exercício 10. Encontre todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \dfrac{3x - 4y}{xy} & = & -8 \\ \dfrac{2x + 7y}{xy} & = & 43 \end{cases}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Encontre soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} & = & 12 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} & = & \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Exercício 12. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} & = & 2 \\ \dfrac{xyz}{y+z} & = & \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{xyz}{z+x} & = & \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Exercício 13. Dado que todos os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são positivos, encontre as soluções do sistema de equações abaixo nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2x_3\ldots x_n}{x_1} & = & a_1 \\ \dfrac{x_1x_3\ldots x_n}{x_1} & = & a_2 \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_n} & = & a_n \end{cases}$$

Exercício 14. Supondo que $a, b, c \neq 0$ e que o sistema abaixo tem solução, determine o valor de x.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & = & a \\ \dfrac{xz}{x+z} & = & b \\ \dfrac{yz}{y+z} & = & c. \end{cases}$$

Exercício 15. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2a^2}{1+a^2} & = & b \\ \dfrac{2b^2}{1+b^2} & = & c \\ \dfrac{2c^2}{1+c^2} & = & a \end{cases}$$

Exercício 16. Em sua velocidade usual, um homem desce um rio de 15 quilometros de comprimento em 5 horas a menos que o tempo que ele gasta nadando no mesmo rio percorrendo o caminho contrário. Se ele dobrar a sua velocidade usual, ele passa a descer o rio gastando apenas 1 hora a menos que o tempo gasto na volta. Considerando que a velocidade da correnteza do rio se mantém constante durante os trajetos, qual o seu valor km/h?
a) 2 b) $5/2$ c) 3 d) $7/2$ e) 4.

Dica: Quando o homem nada no sentido da correnteza, a sua velocidade relativa deve ser somada com a do rio e, quando nada no sentido contrário ao da correnteza, a velocidade do rio deve ser subtraída de sua velocidade.

Respostas e Soluções.

1. Seja $a = \dfrac{1}{x}$. Então o sistema é equivalente à

$$\begin{cases} a + 3y &= 6 \\ 2a - 5y &= 1. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do dobro da primeira, obtemos $11y = 11$, ou seja, $y = 1$. Substituindo tal valor na primeira equação, encontramos $a = 3$. Consequentemente $(x, y) = (1/3, 1)$.

2. (Extraído Videoaula) Uma condição necessária para que o sistema dado exista é que os denominadores sejam diferentes de zero, ou seja, $x \neq y$ e $x \neq -y$. Multiplicando a primeira equação por $3(x+y)$ e a segunda por $x - y$, obtemos

$$\begin{aligned} 3x &= x + y \\ 4 &= -2(x - y) \end{aligned}$$

Pela primeira equação, $y = 2x$. Substituindo este valor na segunda equação, obtemos $4 = 2x$, ou seja, $x = 2$ e, finalmente, $y = 4$.

3. Uma condição necessária para que as frações envolvidas existam é que tanto x quanto y sejam não nulos. Somando o dobro da primeira equação com a segunda, obtemos $\dfrac{12}{x} = 2$, ou seja, $x = 6$. Substituindo esse valor na primeira equação, encontramos $y = 1/2$. Portando, $(x, y) = (6, 1/2)$.

4. Multiplicando a primeira equação por 3 e somando com a segunda obtemos $\dfrac{15}{y} = 8$, ou seja, $y = 15/8$. Substituindo esse valor na primeira equação, encontramos $x = 15/7$.

5. (Extraído Videoaula) Se $a = \dfrac{1}{x}$ e $b = \dfrac{1}{y}$, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} 4a + 7b &= -18 \\ a + 2b &= -7. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 4 e subtraindo-a da primeira, obtemos $-b = 10$. Portanto, $b = -10$ e $a = -7 - 2b = 13$. Finalmente, podemos concluir que $x = \dfrac{1}{13}$ e $y = -\dfrac{1}{10}$.

6. Uma condição necessária para que as frações existam é que $y \neq 0$. Multiplicando a primeira equação por $2y$, obtemos $2x - 6y = 4$. Subtraindo a equação encontrada da segunda equação do sistema, temos $-3y = -12$, ou seja, $y = 4$. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $x = 14$.

7. Somando todas as equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} &= 36 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 9 \end{aligned}$$

Subtraindo a última equação de todas as equações do sistema, obtemos:

$$\frac{1}{x} = 2, \frac{1}{y} = 3 \text{ e } \frac{1}{z} = 4.$$

Consequentemente, $(x, y, z) = (1/2, 1/3, 1/4)$.

8. (Extraído da AIME 1968) Das equações dadas, temos:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{1}{y} \\ y - 1 &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Portanto, $y(x-1) = 1 = x(y-1)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} xy - y &= xy - x \\ x &= y \end{aligned}$$

A resposta correta está na letra E.

9. (Extraída da AMC) Seja $p = \dfrac{x}{y}$. Assim $x = py$ e o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} py + \dfrac{1}{y} &= 4 \\ y + \dfrac{1}{py} &= \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por p, obtemos $py + \dfrac{1}{y} = \dfrac{p}{4}$. Por comparação, podemos concluir que $\dfrac{p}{4} = 4$ e, consequentemente, $p = 16$.

10. Sejam $a = \dfrac{1}{x}$ e $b = \dfrac{1}{y}$. Assim, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} -4a + 3b &= -8 \\ 7a + 2b &= 43 \end{cases}$$

Subtraindo o dobro da primeira equação do o triplo da segunda, obtemos $29a = 145$, ou seja, $a = 5$. Substituindo o valor de a na primeira equação, obtemos $b = 4$. Portanto, $(x, y) = (1/5, 1/4)$.

11. Multiplicando as equações do sistema anterior por xy, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^3+y^3 &= 12xy \\ 3(x+y) &= xy. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= (x+y)((x+y)^2-3xy), \end{aligned}$$

é conveniente introduzir as variáveis auxiliares $a = x+y$ e $b = xy$. Assim o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} a(a^2-3b) &= 12b \\ 3a &= b. \end{cases}$$

Substituindo o valor de b da segunda na primeira equação, obtemos $a(a^2-9a) = 36a$. Devemos ter $a \neq 0$, pois caso contrário teríamos também $b = 0$ e algum dos denominadores iniciais seria nulo, o que é um absurdo. Podemos então cancelá-lo obtendo a equação do segundo grau

$$a^2-9a-36 = 0.$$

As suas raízes são $a = 12$ e $a = -3$. Para cada um desses valores, temos um novo sistema nas incógnitas iniciais:

$$\begin{cases} x+y &= 12 \\ xy &= 36. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y &= -3 \\ xy &= -9. \end{cases}$$

No primeiro, caso as soluções são $(x,y) = (6,6)$ e, no segundo caso, $(x,y) = (\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{3}{2}(-\sqrt{5}-1))$ ou $(x,y) = (\frac{3}{2}(-\sqrt{5}-1), \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1))$. É imediato verificar que as três soluções encontradas satisfazem o sistema dado.

12. Dividindo a a primeira equação pela segunda e pela terceira, obtemos o novo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y+z}{x+y} &= \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{z+x}{x+y} &= \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Multiplicando ambas as equações por $x+y$, temos

$$\begin{cases} 5x+2y-3z &= 0 \\ x+4y-3z &= 0. \end{cases}$$

Por comparação, $5x+2y = x+4y$, ou seja, $y = 2x$. Substituindo na primeira equação, encontramos $3z = 5x+2y = 9x$, ou seja, $z = 3x$. Assim

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{xyz}{x+y} \\ &= \frac{6x^3}{3x} \\ &= 2x^2. \end{aligned}$$

Daí, $x = \pm 1$ e $(x,y,z) = (1,2,3)$ ou $(x,y,z) = (-1,-2,-3)$. É imediato verificar que os valores encontrados são soluções do sistema.

13. Multiplicando todas as equações, obtemos

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{n-2} = a_1a_2\ldots a_n.$$

Daí,

$$x_1x_2\ldots x_n = \sqrt[n-2]{a_1a_2\ldots a_n} = S.$$

Multiplicando a k-ésima equação por x_k^2, temos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+1}\ldots x_n}{x_k} \\ a_kx_k^2 &= x_1x_2\ldots x_n \\ x_k &= \sqrt{\frac{S}{a_k}}. \end{aligned}$$

Portanto, a única solução do sistema é

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(\sqrt{\frac{S}{a_1}}, \sqrt{\frac{S}{a_2}}, \ldots, \sqrt{\frac{S}{a_n}}\right),$$

com $S = \sqrt[n-2]{a_1a_2\ldots a_n}$.

14. O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{x} &= \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{x+z}{xz} &= \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{y+z}{yz} &= \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

Somando as três equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{ab+bc+ac}{2abc}. \end{aligned}$$

Somando agora as duas primeiras equações do sistema anterior e subtraindo o valor da última equação, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{ab+bc+ac}{2abc}\\
&= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{ab+bc+ac}{2abc}\\
&= \frac{a+b}{ab}-\frac{ab+bc+ac}{2abc}\\
&= \frac{2ac+2bc-ab-bc-ac}{2abc}\\
&= \frac{ab+bc-ac}{2abc}.
\end{aligned}$$

Portando, $x = \dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$.

15. (Extraído da Olimpíada Russa) O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{cases}
\dfrac{a^2+1}{a^2}-\dfrac{2}{b} &= 0\\
\dfrac{b^2+1}{b^2}-\dfrac{2}{c} &= 0\\
\dfrac{c^2+1}{c^2}-\dfrac{2}{a} &= 0
\end{cases}$$

Somando essas equações, obtemos

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+\left(1-\frac{1}{b}\right)^2+\left(1-\frac{1}{c}\right)^2=0.$$

Como um quadrado de um real sempre é não negativo, a única maneira para que a soma deles seja nula é:

$$1=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c},$$

ou seja, $a=b=c=1$.

16. Sejam c e v as velocidades da correnteza do rio e do homem. Os dados do enunciado podem ser traduzidos no seguinte sistema:

$$\begin{cases}
\dfrac{15}{v+c} &= \dfrac{15}{v-c}-5\\
\dfrac{15}{2v+c} &= \dfrac{15}{2v-c}-1
\end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (v^2-c^2) e a segunda por $(4v^2-c^2)$, obtemos

$$\begin{cases}
15(v-c) &= 15(v+c)-5(v^2-c^2)\\
15(2v-c) &= 15(2v+c)-(4v^2-c^2)
\end{cases}$$

Por comparação, segue que $5(v^2-c^2)=(4v^2-c^2)$, ou seja, $v^2=4c^2$. Como as velocidades são positivas, $v=2c$. Substituindo esse valor em qualquer uma das duas equações do sistema, obtemos $c=2$ e, consequentemente, $v=4$. Resposta letra A.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com