Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Interpretação Algébrica

Tópicos Adicionais

Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria
Interpretação Algébrica

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Determine $T(1,-1)$.

Exercício 2. Se

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

é a matriz associada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, isto é, suas colunas são os vetores $T(1,0)$ e $T(0,1)$. Determine $T(1,2)$.[1]

Exercício 3. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear que satisfaz

$$T(x,y) = (2x+3y, 4x+5y),$$

encontre a matriz 2×2 que representa essa transformação.

Exercício 4. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear que satisfaz

$$T(x,y) = (2x+3y, 4x+5y, x+y),$$

encontre a matriz 3×2 que representa essa transformação.

Exercício 5. Qual matriz transforma $(1,0)$ em $(2,5)$ e $(0,1)$ em $(3,1)$?

Exercício 6. Qual matriz transforma $(2,5)$ em $(1,0)$ e $(3,1)$ em $(0,1)$?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

e sejam T e R as transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ associadas a elas, respectivamente. Determine as matrizes associadas às seguintes transformações

a) $T + R$.

b) $T - R$

c) $T \circ R$.

Exercício 8. Encontre todas as transformações lineares $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(1,2) = (4,3)$$

Exercício 9. Qual matriz transforma $(1,0,0)$ em $(1,2,3)$ e $(0,1,0)$ em $(2,3,1)$ e $(0,0,1)$ em $(3,1,2)$?

Exercício 10. Qual matriz transforma $(1,1)$ em $(1,0)$ e $(1,-1)$ em $(0,0)$?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear que satisfaz

$$T(x,y,z) = (y,z,x).$$

Determine $T^{1002}(1,2,3)$.

Exercício 12. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (y,z,0).$$

Se $v = (1,1,1)$, determine o vetor

$$v + T(v) + T^2(v) + \ldots + T^{100}(v).$$

Exercício 13. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y) = (x+y, x).$$

Determine o valor de $T^{10}(1,1)$

Exercício 14. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2x+5y+2z, 4x+10y+4z, 6x+15y+6z).$$

Determinar os valores de k, para que $(9,18,k)$ esteja na imagem de T.

[1] Nos exercícios que seguem, todas as representações matriciais de transformações lineares estarão associadas às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$.

Respostas e Soluções.

1. Temos

$$\begin{aligned} T(1,-1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Temos

$$\begin{aligned} T(1,2) &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. A matriz procurada é

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. A matriz procurada é

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. A matriz procurada é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Queremos encontrar

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isso é equivalente a resolver os sistemas

$$\begin{cases} 2a + 5b &= 1 \\ 3a + b &= 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2c + 5d &= 0 \\ 3c + d &= 1 \end{cases}$$

As soluções desses sistemas produzem

$$A = \begin{pmatrix} -1/13 & 3/13 \\ 5/13 & -2/13 \end{pmatrix}.$$

7. Temos as seguintes matrizes

a) $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 14 & -10 \end{pmatrix}.$

8. Se $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ é a matriz que representa a transformação, devemos ter

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Isso é equivalente a

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 4 \\ a_{21} + 2a_{22} = 5 \end{cases}$$

Sejam $t = a_{12}$ e $k = a_{22}$. Daí, substituindo no sistema anterior, encontramos

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (4 - 2t, t, 5 - 2k, k),$$

com t e k reais. Portanto,

$$T(x,y) = ((4-2t)x + ty, (5-2k)x + ky).$$

9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Queremos encontrar

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isso é equivalente a resolver os sistemas

$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ a-b &= 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c+d &= 0 \\ c-d &= 0 \end{cases}$$

As soluções desses sistemas produzem

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Da propriedade do enunciado, podemos concluir que $T^3(x,y,z) = (x,y,z)$, logo $T^{3k}(x,y,z) = (x,y,z)$. Como $1002 = 3 \cdot 334$, temos $T^{1002}(1,2,3) = (1,2,3)$.

12. A matriz associada à transformação T é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Perceba que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{100} &= \\ I + A + A^2 &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, o vetor procurado é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13. A matriz associada a transformação é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Calculemos inicialmente as primeiras potências de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

Considere a sequência de Fibonacci definida por:

$$F_0 = F_1 = 0 \text{ e } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Suponha que para $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \cdot A \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$
A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.
$$

E assim

$$
\begin{aligned}
T^{10}(1,1) &= (F_{11} + F_{10}, F_{10} + F_9) \\
&= (F_{12}, F_{11}) \\
&= (144, 89).
\end{aligned}
$$

14. Considerando a matriz que representa a transformação linear, precisamos que

$$
\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 10 & 4 \\ 6 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ k \end{pmatrix}.
$$

Essa equação produz o sistema:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
2x + 5y + 2z &=& 9 \\
4x + 10y + 4z &=& 18 \\
6x + 15y + 6z &=& k
\end{array}
\right.
$$

Somando as duas primeiras equações e comparando com a terceira, devemos ter $9 + 18 = k$. Portanto, para que o sistema tenha solução, devemos ter $k = 27$. Para esse valor, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ tem como imagem $(9, 18, k)$.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM