Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3

Paralelogramos Especiais

8° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3
Paralelogramos Especiais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sobre os paralelogramos, podemos afirmar que:

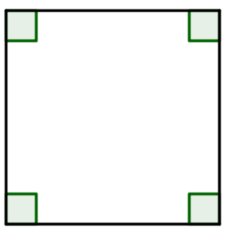
a) possuem todos os lados com mesma medida.

b) todos os ângulos são retos.

c) possui pares de lados opostos congruentes.

d) suas diagonais têm a mesma medida.

Exercício 2. O que podemos afirmar, com certeza, sobre a figura abaixo?



a) é um quadrado.

b) é um retângulo.

c) não é um paralelogramo.

d) é um losango.

Exercício 3. Assinale a alternativa correta.

a) todo quadrado é losango.

b) todo losango é retângulo.

c) todo paralelogramo é quadrado.

d) todo retângulo é losango.

Exercício 4. Uma formiga caminha sobre um losango $ABCD$, dando 10 voltas. Se a distância entre os vértices A e B, consecutivos, é $12cm$, qual a distância percorrida pela formiga?

Exercício 5. Qual o ângulo formado pelas diagonais de um losango?

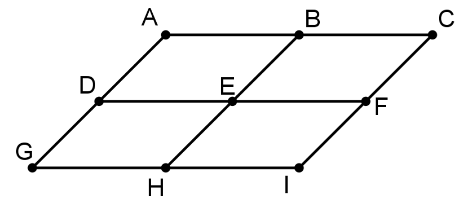
a) 60^o.

b) 90^o.

c) 120^o.

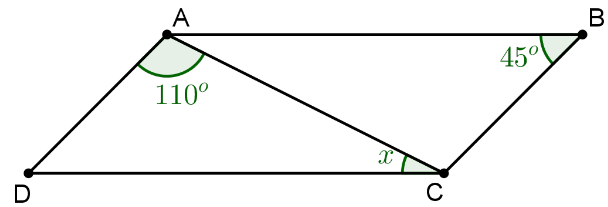
d) 150^o.

Exercício 6. Se os segmentos AB, BC, DE, EF, GH e HI são congruentes e os segmentos AD, DG, BE, EH, CF e FI também são congruentes, quantos paralelogramos com lados sobre os segmentos citados existem na figura.



2 Exercícios de Fixação

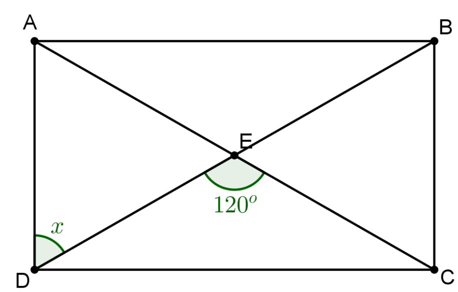
Exercício 7. Determine o valor de x na figura, sendo $ABCD$ um paralelogramo.



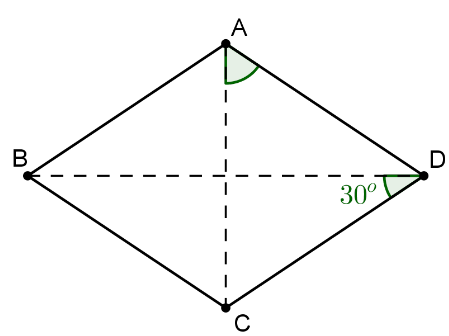
Exercício 8. Determine os ângulos determinados pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

Exercício 9. Determine os ângulos internos de um paralelogramo cuja diferença entre dois deles é 40^o.

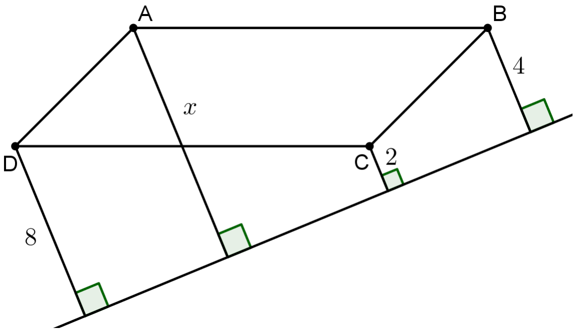
Exercício 10. Determine o valor de x no retângulo da figura.



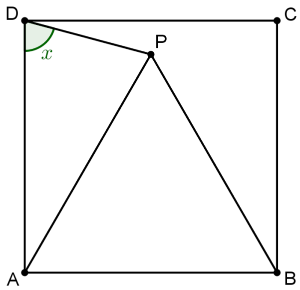
Exercício 11. Na figura abaixo temos um losango. Determine a medida do ângulo $\angle CAD$.



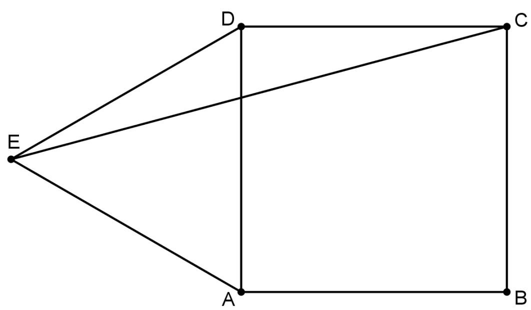
Exercício 12. Determine a medida de x na figura, sendo $ABCD$ um paralelogramo.



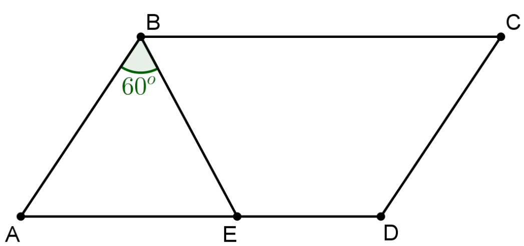
Exercício 13. Se $ABCD$ é um quadrado e ABP é um triângulo equilátero, determine o valor de x na figura.



Exercício 14. Determine a medida do ângulo $\angle DCE$, sendo $ABCD$ um quadrado e ADE um triângulo equilátero.

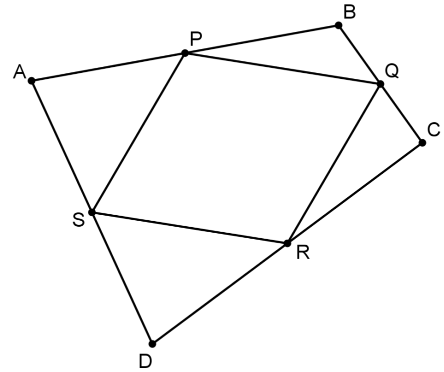


Exercício 15. No paralelogramo $ABCD$ da figura, BE é bissetriz do ângulo $\angle ABC$. Determine a medida do ângulo $\angle AEB$.

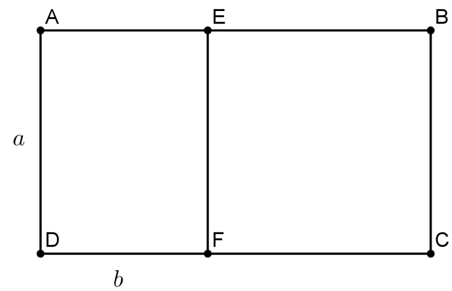


3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

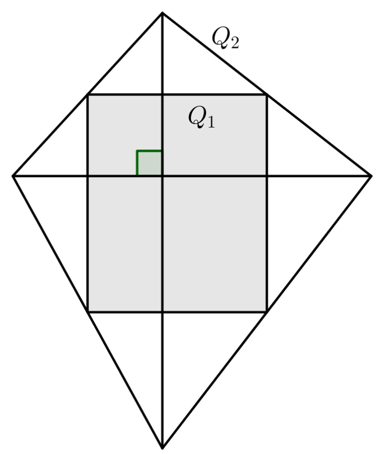
Exercício 16. Seja o quadrilátero $ABCD$ da figura e P, Q, R e S os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Mostre que o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.



Exercício 17. O retângulo $ABCD$ da figura foi dividido em um quadrado e um retângulo pelo segmento EF. A razão das dimensões do retângulo $ABCD$ é igual à razão das dimensões do retângulo $AEFD$. Determine essa razão, $\dfrac{a}{b}$, a qual chamamos de razão áurea.



Exercício 18. Na figura, o quadrilátero Q_1 é formado ligando-se os pontos médios dos lados do quadrilátero Q_2, que tem diagonais perpendiculares. Mostre que Q_1 tem diagonais iguais.



Respostas e Soluções.

1. C.

2. B.

3. A.

4. Como todos os lados de um losango têm mesma medida, então uma volta da formiga corresponde à $4 \cdot 12 = 48cm$. Assim, a distância percorrida foi $10 \cdot 48 = 480cm$

5. B.

6. São 4 paralelogramos como $ABED$; 2 como $ABHG$; 2 como $ACFD$; e $ACIG$. Portanto, são $4 + 2 + 2 + 1 = 9$ paralelogramos.

7. Como os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, temos que $\angle ADC = \angle CBA = 45^o$. Assim, no triângulo ACD temos $110^o + 45^o + x = 180^o$, segue que $x = 25^o$.

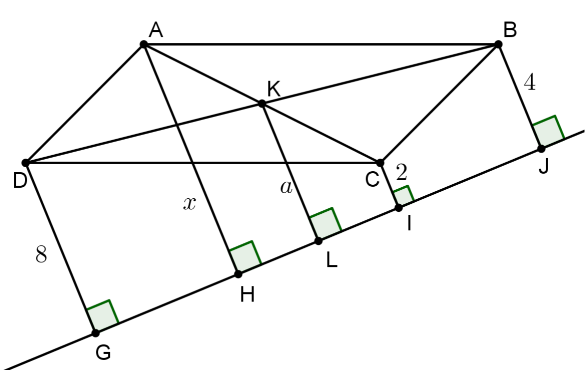
8. Como dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, então traçando duas bissetrizes em ângulos consecutivos, elas formarão, com o lado entre esses ângulos um triângulo, cujos ângulos da base (lado do paralelogramo) somam $\dfrac{180^o}{2} = 90^o$ e, por consequência, o terceiro ângulo (ângulo entre as bissetrizes) é igual a 90^o.

9. Supondo que esses ângulos sejam α e $180^o - \alpha$, pois são ângulos consecutivos, já que a diferença não é nula (dessa forma seriam ângulos opostos). Como a diferença é 40^o, temos $\alpha - (180^o - \alpha) = 40$, segue que $\alpha = 110^o$, ou seja, os ângulos medem 110^o, 110^o, 70^o e 70^o.

10. Temos que $\angle AED = 180^o - 120^o = 60^o$. Como as diagonais de um retângulo se interceptam no ponto médio e são congruentes, então o triângulo ADE é isósceles. Assim, $2x + 60^o = 180^o$, segue que $x = 60^o$.

11. As diagonais de um losango o dividem em quatro triângulos retângulos congruentes. Assim, $\angle CAD + 30^o + 90^o = 180^o$, segue que $\angle CAD = 60^o$.

12. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando as diagonais do paralelogramo, temos:



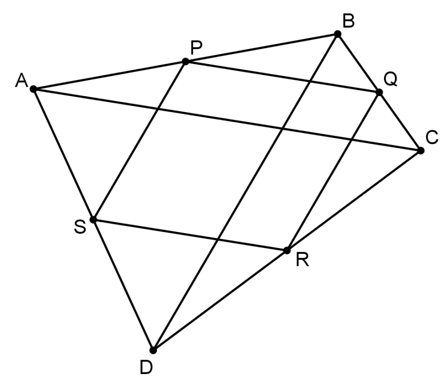
Analisando o trapézio $BJGD$, KL é base média, então $a = \dfrac{4+8}{2} = 6$. Analisando o trapézio $ACIH$, KL também é base média, então $a = \dfrac{x+2}{2}$, segue que $x = 10$.

13. Como o triângulo ABP é equilátero, então $\angle BAP = 60^o$ e, consequentemente, $\angle PAD = 90^o - 60^o = 30^o$. Além disso, $PA = AB = AD$, ou seja, o triângulo APD é isósceles, com $AD = AP$ e $\angle ADP = \angle APD = x$. Assim, $2x + 30^o = 180^o$, segue que $x = 75^o$.

14. $\angle ADC = 90^o$, pois $ABCD$ é quadrado, e $\angle ADE = 60^o$, pois ADE é triângulo equilátero. Temos, portanto, $\angle CDE = 90^o + 60^o = 150^o$. Se $CD = AD = DE$, então o triângulo CDE é equilátero e $\angle DCE = \angle DEC$. Assim $2\angle DCE + 150^o = 180^o$, segue que $\angle DCE = 15^o$.

15. Se BE é bissetriz, então $\angle ABC = 2 \cdot 60^o = 120^o$ e, consequentemente, $\angle BAD = \angle BAE = 180^o - 120^o = 60^o$. Temos portanto que o triângulo ABE é equilátero, ou seja, $\angle AEB = 60^o$.

16. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando a diagonal AC, temos que PQ é base média do triângulo ABC e, portanto, é paralela a AC e mede a metade de AC. De forma análoga, SR é paralela a AC e mede metade de AC. Se PQ é paralelo a SR e tem mesma medida, $PQRS$ é paralelogramo.

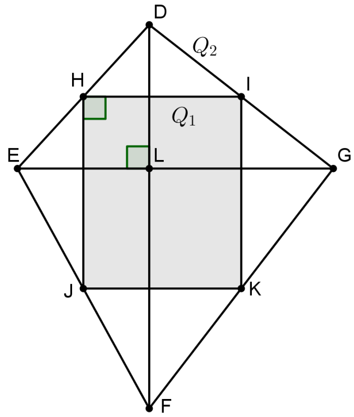


17. Fazendo $\dfrac{a}{b} = x$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a} \\
\frac{a}{b} &= 1 + \frac{b}{a} \\
x &= 1 + \frac{1}{x} \\
x^2 &= x + 1 \\
x^2 - x - 1 &= 0 \\
x^2 - x + \frac{1}{4} &= \frac{5}{4} \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\
x - \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Encontramos dois valores para a razão $\dfrac{a}{b}$, mas nos convém apenas o valor positivo, portanto $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

18. (Extraído da Vídeo Aula)



Pela figura temos que H e J são pontos médios dos lados DE e EF e, portanto, HJé paralelo à diagonal DF. Assim, o segmento EL, transversal às paralelas HJ e DF, também é perpendicular ao segmento HJ. De forma análoga, o segmento DL é perpendicular a HI. Portanto, as diagonais DF, EG e os lados HI e HJ formam um quadrado, sendo $\angle JHI = 90^o$. Da mesma maneira, chegamos a $\angle HIK = \angle IKJ = \angle KJH = 90^o$. Temos portanto que $HIKJ$ é um retângulo e, consequentemente, suas diagonais são congruentes.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com