Tópicos Adicionais

Desigualdades

Funções Afim
Resolução de Exercícios

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $x \geq 0$, prove que $1 + x \geq 2\sqrt{x}$.

Exercício 2. Mostre que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ quaisquer que sejam os reais x e y.

Exercício 3. Para todo ângulo agudo α, mostre que $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2$.

Exercício 4. Prove que se $a + b = 1$, em que a e b são números positivos, então

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Exercício 5. Prove que dados três números positivos a, b e c, vale que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Exercício 6. Considere 6 números positivos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Prove a seguinte desigualdade:

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}.$$

Exercício 7. Dados n números positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Prove que

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Exercício 8. Prove que para quaisquer dois números positivos a e b temos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a + bn}{n+1},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Para quais valores reais de x a fração abaixo atinge o seu valor mínimo?

$$\frac{a + bx^4}{x^2}. \ (a \text{ e } b \text{ positivos}).$$

Exercício 10. Prove que a soma dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo nunca excede $\sqrt{2}$ vezes a hipotenusa do triângulo.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Sejam a, b, c reais não-negativos, prove que: $a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

Exercício 12. Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais a, b e c.

Exercício 13. Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Exercício 14. Prove que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1} - 1).$$

Exercício 15. Mostre que $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Exercício 16. Se $a_i > 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $a_1a_2\ldots a_n = 1$, mostre que

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Exercício 17. Para $a, b, c, d \geq 0$, mostre que

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Exercício 18. Mostre que para quaisquer números reais a, b, c temos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Exercício 19. Se a, b, c são reais positivos, mostre que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Exercício 20. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, mostre que

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Exercício 21. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos, mostre que

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Exercício 22. Se a, b, c, d são números reais positivos, mostre que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Exercício 23. Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros positivos. Prove que

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$$

para todo $x > 0$.

Respostas e Soluções.

1. Como todo quadrado de um número real é não negativo, segue que

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-1)^2 &\geq 0\\ x+1 &\geq 2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

2. Como $(x-y)^2 \geq 0$, segue que $x^2+y^2 \geq 2xy$.

3. Como $\alpha \in (0, \pi/2)$, segue que $\sin\alpha, \cos\alpha > 0$. Daí, pela desigualdade MA-MG, segue que

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geq 2\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = 2.$$

4. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}1 &= a+b\\ &\geq 2\sqrt{ab}\\ \frac{1}{ab} &\geq 4.\\ &\text{e}\\ a^2+b^2 &\geq 2ab\\ 2(a^2+b^2) &\geq (a+b)^2\end{aligned}$$

A expansão dos membros do lado esquerdo e a Desigualdade MA-MG produz

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &=\\ \left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right) &=\\ \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+(a^2+b^2)+4 &\geq\\ \frac{2}{ab}+\frac{(a+b)^2}{2}+4 &\geq\\ 8+\frac{1}{2}+4 &= \frac{25}{2}.\end{aligned}$$

5. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a+b &\geq 2\sqrt{ab}\\ b+c &\geq 2\sqrt{bc}\\ a+c &\geq 2\sqrt{ac}\end{aligned}$$

Multiplicando as desigualdades anteriores, temos

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

6. Elevando ambos os membros da desigualdade ao cubo, precisamos mostrar que

$$\begin{aligned}(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3) &\geq a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+\\ &+ 3\sqrt[3]{(a_1a_2a_3)^2b_1b_2b_3}+\\ &+ 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3(b_1b_2b_3)^2}.\end{aligned}$$

O desenvolvimento de $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$, nos produz a soma

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3+b_1b_2b_3 &=\\ a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3 &+\\ a_1b_2b_3+b_1a_2b_3+b_1b_2a_3.\end{aligned}$$

para concluir o problema, basta aplicar a Desigualdade MA-MG nos termos:

$$\begin{aligned}a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3 &\geq 3\sqrt[3]{(a_1a_2a_3)^2b_1b_2b_3}\\ a_1b_2b_3+b_1a_2b_3+b_1b_2a_3 &\geq 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3(b_1b_2b_3)^2}.\end{aligned}$$

7. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} &\geq\\ n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}} &=\\ n.\end{aligned}$$

8. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{a+bn}{n+1} &= \frac{a+b+b+b+\ldots+b}{n+1}\\ &\geq \sqrt[n]{ab^n}.\end{aligned}$$

9. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a+bx^4 &\geq 2x^2\sqrt{ab}\\ \frac{a+bx^4}{x^2} &\geq 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Portanto, o valor mínimo da expressão dada é $2\sqrt{ab}$ e ocorre quando $a = bx^4$, ou seja, $x = \pm\sqrt[4]{a/b}$.

10. Sejam a e b os catetos de um triângulo retângulo e c a sua hipotenusa. Pela Desigualdade MA-MG e o Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ &\leq 2(a^2+b^2)\\ &= 2c^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$a+b \leq \sqrt{2}c.$$

11. Expandindo os termos do lado esquerdo e cancelando os termos comuns, é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+2ab^2+2ba^2+2ac^2+2a^2c+2b^2c+2bc^2 &\geq\\ 15abc.\end{aligned}$$

Para verificar isso, basta rescrever a soma do lado esquerdo em mais parcelas e aplicar a Desigualdade MA-MG:

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+(ab^2+ab^2)+(a^2b+a^2b) &+\\ (a^2c+a^2c)+(ac^2+ac^2)+(b^2c+b^2c)+(bc^2+bc^2) &\geq\\ 15\sqrt[15]{a^{15}b^{15}c^{15}} &=\\ 15abc.\end{aligned}$$

12. Como

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a^2+ac+ab+bc\\ &= bc+a(a+b+c),\end{aligned}$$

pela Desigualdade MA-MG, temos

$$bc+a(a+b+c) \quad \geq \quad \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

13. Como $(a+b)^2 \geq 4ab$, segue que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Usando as expressões análogas para os pares (a,c) e (b,c), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} &=\\ \left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)+\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}\right)+\left(\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right) &\geq\\ \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.\end{aligned}$$

14. Pela desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}\\ &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}}\\ &= \sqrt[n]{n+1}.\end{aligned}$$

15. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\ &\geq 2.\end{aligned}$$

16. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{a_i}.$$

Multiplicando essas Desigualdades para $i=1,2,\ldots,n$, temos

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) &\geq\\ (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\ldots(2\sqrt{a_n}) &= 2^n.\end{aligned}$$

17. Elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}(a+c)(b+d) &\geq ab+2\sqrt{abcd}+cd \Leftrightarrow\\ ad+cb &\geq 2\sqrt{abcd}\end{aligned}$$

Pela Desigualdade MA-MG, segue que

$$ad+cb \geq 2\sqrt{(ad)(cb)}$$

e isso conclui a demonstração.

18. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &\geq 2ab\\ a^2+c^2 &\geq 2ac\\ b^2+c^2 &\geq 2bc\end{aligned}$$

Somando as desigualdades anteriores, temos

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(ab+ac+bc)\\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+ac+bc\end{aligned}$$

19. Se $A=a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)=2(ab+ac+bc)$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}A\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) &\geq (a+b+c)^2\\ &= a^2+b^2+c^2+A.\end{aligned}$$

Pelo exercício anterior, segue que $a^2+b^2+c^2 \geq A/2$. Portanto,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3A}{2A}=\frac{3}{2}.$$

20. Como $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(ab+ac+bc)\\ 1 &\geq ab+ac+bc.\end{aligned}$$

Além disso, como $(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2+c^2) &\geq -2(ab+ac+bc)\\ 1/2 &\geq -(ab+ac+bc).\end{aligned}$$

21. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, com $u=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ e $v=(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$. Temos

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_n}\right) &\geq\\ (1+1+\ldots+1)^2 &=\\ n^2.\end{aligned}$$

22. Como $(a-b)^2 \geq 0$, segue que $(a+b)^2 \geq 4ab$ e daí

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Portanto, o uso reiterado dessa desigualdade nos permite concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\geq\\ \frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\geq\\ \frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d} &\geq\\ \frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

23. Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$. Para $x = 1$, precisamos mostrar que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{1}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Isso é equivalente a mostrar que

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq 1.$$

Como os coeficientes do polinômio são positivos, é verdade que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq 1$$

e isso demonstra a desigualdade anterior. Para o caso geral, pela Desigualdade De Cauchy-Schwarz, com $u = (a_0, a_1/x, \ldots, a_n/x^n)$ e $v = (a_0, a_1x, \ldots, a_nx^n)$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot P(x) &= \\ \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x^i}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right) &\geq \\ (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^2 &\geq \\ 1^2 &= 1. \end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com