Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria

Composição

Tópicos Adicionais

Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria
Composição

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^2(1,1) = (a,b)$, determine $a+b$.

Exercício 2. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^2(1,2) = (a,b)$, determine $a+b$.

Exercício 3. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^3(1,1) = (a,b)$ determine $a-b$.

Exercício 4. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^3(1,1) = (a,b)$, determine $a-b$.

Exercício 5. Se $T(x,y) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $T^4(1,1) = (a,b)$, determine $a-b$.

Exercício 6. Se $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, determine $T^4(1,2,42)$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear Tal que $T(1,0) = (3,1)$, $T(0,1) = (1,4)$ e $T^2(1,1) = (a,b)$, determine $a+b$.

Exercício 8. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear Tal que $T(1,0) = (5,1)$, $T(0,1) = (1,3)$ e $T^2(1,1) = (a,b)$ determine $a+b$.

Exercício 9. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear Tal que $T(1,0) = (5,1)$, $T(0,1) = (1,5)$ e $T^2(1,1) = (a,b)$, determine $a+b$.

Exercício 10. Considere as transformações lineares

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } R(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Determine $T \circ R(1,1)$

Exercício 11. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T(x,y,z) = (y,z,x)$ e $T^{13}(1,4,8) = (a,b,c)$, dermine o valor de a.

Exercício 12. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T(x,y,z) = (y,z,x)$ e $T^{14}(1,4,8) = (a,b,c)$, dermine o valor de a.

Exercício 13. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T(x,y,z) = (y,z,x)$ e $T^{17}(1,5,7) = (a,b,c)$, dermine o valor de a.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Determine a e b de modo que as transformações lineares

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (3x+y, 4x+ay), \\ R(x,y) &= (bx - y/2, -2x + 3y/2) \end{aligned}$$

satisfaçam $T \circ R = R \circ T$.

Exercício 15. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(x,y) = (x+y,x)$, $T^{10}(1,1) = (a,b)$, determine o valor de $a-b$.

Exercício 16. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear tal que $T(x,y) = (x+y,x)$, $T^{12}(1,1) = (a,b)$, determine o valor de $a-b$. A matriz associada à transformação é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $A^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ em que F_k é o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci, segue que $T^{12}(1,1) = (F_{14}, F_{13})$ e $b - a = F_{12} = 144$.

Exercício 17. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transfomação linear tal que $T(x,y) = (-y, x+y)$, calcule $T^{2005}(1,1)$.

Exercício 18. Seja I a transformação identidade e T, R transformações lineares inversíveis, todas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, satisfazendo

$$T^5 \circ R^3 = T^8 \circ R^5 = I,$$

determine a transformação $T - R$.

Respostas e Soluções.

1. Temos $T^2(1,1) = T(2+1, 1+5) = (12, 33)$. Portanto, $a + b = 45$.

2. Temos $T^2(1,1) = T(5,19) = (34,176)$. Portanto, $a + b = 210$.

3. Temos $T^3(1,1) = T^2(4,1) = T(13,1) = (40,1)$. Portanto $a - b = 39$.

4. Temos $T^3(1,1) = T^2(22,1) = T(463,1) = (9724,1)$. Portanto $a - b = 9723$.

5. Temos $T^4(1,1) = T^3(7,1) = \ldots = (7^4, 1^4)$. Portanto, $a - b = 2400$.

6. Temos $T^2(x,y,z) = (0,0,z)$ e $T^3(x,y,z) = (0,0,0)$. Assim, $T^4(1,2,42) = (0,0,0)$

7. Temos $T^2(1,1) = T(4,5) = (17,24)$. Portanto, $a + b = 41$.

8. Temos $T^2(1,1) = T(6,4) = (34,18)$. Portanto, $a + b = 52$.

9. Temos $T^2(1,1) = T(61,6) = (361,36)$. Portanto, $a + b = 72$.

10. Temos

$$T \circ R(1,1) = T(0,-2) = (-4,4).$$

11. Como $13 = 3 \cdot 4 + 1$ e $T^3(x,y,z) = (x,y,z)$ segue que $T^{13}(1,4,8) = (4,8,1)$. Portanto, $a = 4$.

12. Como $14 = 3 \cdot 4 + 2$ e $T^3(x,y,z) = (x,y,z)$, segue que $T^{14}(1,4,8) = (8,1,4)$. Portanto, $a = 8$.

13. Como $17 = 3 \cdot 5 + 2$ e $T^3(x,y,z) = (x,y,z)$, segue que $T^{17}(1,5,7) = (7,1,5)$. Portanto $a = 7$.

14. Temos

$$\begin{aligned} T \circ R(x,y) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3b-2 & 0 \\ 4b-2a & -2+3a/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$R \circ T = \begin{pmatrix} 3b-2 & b-a/2 \\ 0 & -2+3a/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para que ocorra a igualdade, devemos ter $4b - 2a = 0$ e $b - a/2 = 0$. Essas equações são equivalentes e assim para qualquer par (a,b) com $a = 2b$ occorre a igualdade.

15. A matriz associada à transformação é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $A^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ em que F_k é o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci segue que $T^{10}(1,1) = (F_{12}, F_{11})$ e $b - a = F_{10} = 55$.

17. Como

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

É relevante começarmos calculando as potências da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -I \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} A^{2005} &= A^{2004} \cdot A \\ &= (A^3)^{668} \cdot A \\ &= (-I)^{668} \cdot A \\ &= A \end{aligned}$$

Portanto, $T(1,1) = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (-1, 2)$.

18. Se T^{-1} e R^{-1} são as tranformações inversas de T e R, respectivamente, a relação dada nos permite concluir que

$$\begin{aligned} I &= T^{-5} \circ T^5 \circ R^3 \circ R^{-3} \\ &= T^{-5} \circ T^8 \circ R^5 \circ R^{-3} \\ &= T^3 \circ R^2. \end{aligned}$$

Assim, podemos efetuar as trocas:

$$\begin{aligned}
T^5 \circ R^3 &= T^8 \circ R^5 \\
&= T^5 \circ (T^3 \circ R^2) \circ R^3 \\
&= T^5 \circ I \circ R^3 \\
&= T^2 \circ (T^3 \circ R^2) \circ R \\
&= T^2 \circ I \circ R \\
&= T^2 \circ R
\end{aligned}$$

Dessa última identidade, podemos escrever

$$\begin{aligned}
T^{-2} \circ T^5 \circ R^3 \circ R^{-1} &= T^{-2} \circ T^2 \circ R \circ R^{-1} \\
T^3 \circ R^2 &= I \\
T \circ (T^2 \circ R) \circ R &= I \\
T \circ R &= I.
\end{aligned}$$

Como $I = T^5 \circ R^3 = T^2 \circ R$, segue que $T \circ R = T^2 \circ R$ e daí

$$\begin{aligned}
I &= T^{-1} \circ (T \circ R) \circ R^{-1} \\
&= T^{-1} \circ (T^2 \circ R) \circ R^{-1} \\
&= T.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $T = I$, segue que $R = T \circ R$ e $T - R = 0$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com