Módulo de Geometria Analítica 1

Paralelismo e Perpendicularismo.

3^a **série E.M.**

Portal da Matemática
OBMEP

Geometria Analítica 1
Paralelismo e Perpendicularismo.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine se as retas de equações $r: \ 2x+5y-1=0$ e $s: \ 2x-5y+1=0$ se intersectam. Em caso positivo, determine o(s) ponto(s) de concorrência?

Exercício 2. As retas r e s são perpendiculares entre si e interceptam-se no ponto P. Se a equação de r é $x+2y-4=0$ e s intercepta o eixo das ordenadas em $y=\dfrac{9}{2}$, então quais as coordenadas do ponto P?

Exercício 3. Avalie como ou **C**erta ou **E**rrada cada uma das proposições abaixo relativas ao sistema linear com duas equações e duas incógnitas, onde as equações são representadas graficamente por duas retas r e s, coplanares.

I) se $r \cap s = \emptyset$, o sistema é impossível.

II) se $r \cap s = s$, o sistema é possível e determinado.

III) se $r \cap s = r$, o sistema é possível e indeterminado.

IV) se $r \cap s = \emptyset$, o sistema é possível e determinado.

V) se $r \cap s = \{P\}$, o sistema é impossível.

Exercício 4. As retas r e s são perpendiculares e interceptam-se no ponto $(2,4)$. A reta s passa pelo ponto $(0,5)$. Qual a equação da reta r?

Exercício 5. A reta r passa pelo ponto $(16,11)$ e não intercepta a reta de equação $y=\dfrac{x}{2}-5$. Considerando o ponto $P(7,k)$, qual o valor de k de forma que o ponto P pertença a reta r?

Exercício 6. Complete o quadro abaixo, onde r, s, t, u, v são retas distintas e coplanares.

	r	s	t
u	//		$\perp$
v		$\perp$	
s	$\perp$		

Ao finalizar corretamente os espaços incompletos, determine quantas vezes o símbolo $\perp$ aparece?

Exercício 7. Determinar m, para que as retas: $m^2x+my+8=0$ e $3x+(m+1)y+9=0$ sejam perpendiculares.

Exercício 8. Seja $A=(4,2)$ um ponto do plano cartesiano e sejam B e C os simétricos de A em relação aos eixos coordenados. Qual a equação da reta que passa por A e é perpendicular à reta que passa por B e C?

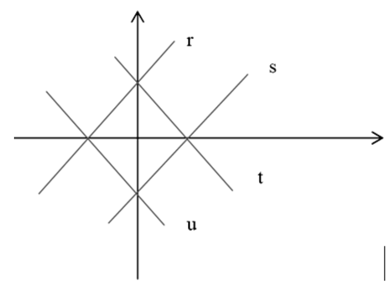
2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. As retas $r: y=2x-1$ e $s: y=ax+b$ são perpendiculares no ponto $A(2,y)$. Quais os valores de a e b?

Exercício 10. Considere as retas $r_1: y=m_1x+b_1$ e $r_2: y=m_2x+b_2$, tais que r_1 e r_2 são paralelas, a reta r_1 passa pelo ponto $A(0,2)$ e a reta r_2 passa pelo ponto $B(1,0)$. Sabendo que a reta l passando pelos pontos A e B é perpendicular à reta r_1, qual é o valor do produto $m_2 \cdot b_1$?

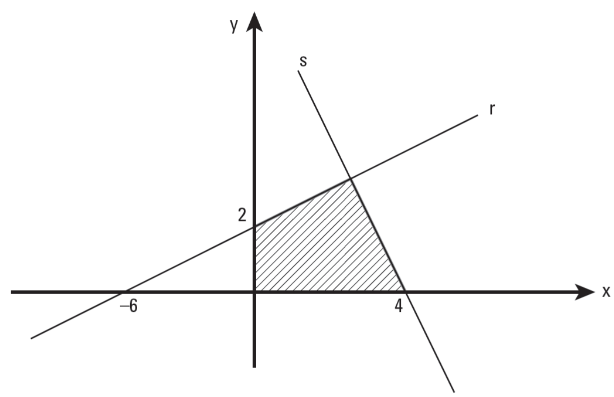
Exercício 11. Na figura abaixo, temos quatro retas $r//s$ e $t//u$, cujas equações são:

- (r) : $y=m_1x+n_1$
- (s) : $y=m_2x+n_2$
- (t) : $y=m_3x+n_3$
- (u) : $y=m_4x+n_4$



Faça um estudo dos sinais dos m_i e n_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ e determine quais deles são iguais.

Exercício 12. No plano cartesiano representado abaixo, as retas r e s são perpendiculares. Quanto a área da região hachurada vale?



Exercício 13. Considere as retas r e s definidas por $kx–(k+2)y=2$ e $ky–x=3k$, respectivamente. Determine o valor de k de modo que as retas r e s sejam paralelas.

Exercício 14. O gráfico da equação

$$y=\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{16}$$

é a reta r. Qual a equação da reta perpendicular a r que passa pelo ponto $(1,4)$?

Exercício 15. Sendo (r) uma reta dada pela equação $x-2y+2=0$, então, qual a equação da reta (s) simétrica à reta r em relação ao eixo das abscissas?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Se as coordenadas de um ponto genérico de uma reta r são dadas por $x = \dfrac{t+1}{3}$ e $y = t - 1$, $t \in \mathbb{R}$, então

a) o ponto $(0;2)$ pertence a r.

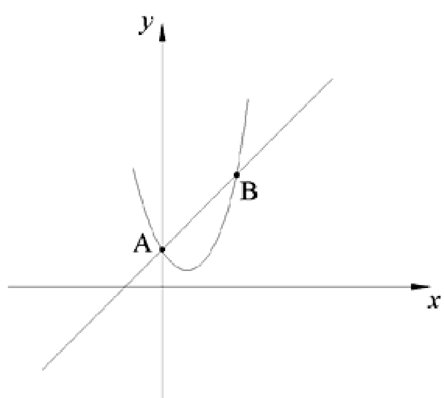
b) r intercepta o eixo dos x no ponto $(-1;0)$.

c) o coeficiente angular de r é -2.

d) r é paralela à reta de equação $3x + y + 2 = 0$.

e) r é perpendicular à reta de equação $x + 3y + 2 = 0$.

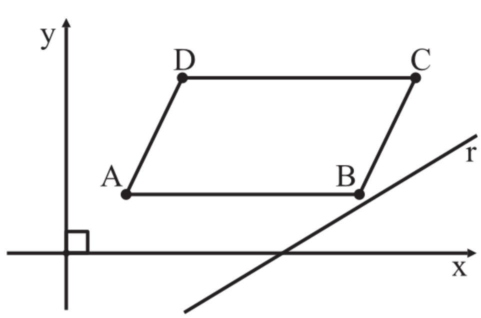
Exercício 17. A figura abaixo mostra a reta de equação $y = x + 1$ e a parábola de equação $y = x^2 - x + 1$.



a) Encontre as coordenadas dos pontos$A$ e B.

b) Encontre o valor de b para o qual a reta de equação $y = x + b$ tangencia a parábola.

Exercício 18. Num sistema cartesiano ortogonal, são dados os pontos $A = (1,1)$, $B = (5,1)$, $C = (6,3)$ e $D = (2,3)$, vértices de um paralelogramo, e a reta r, de equação $r : 3x - 5y - 11 = 0$.



Qual a equação da reta s, paralela à reta r, que divide o paralelogramo $ABCD$ em dois polígonos de mesma área?

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE)
Observe que os coeficientes angulares das retas r e s são $a_r = -\dfrac{2}{5}$ e $a_s = \dfrac{2}{5}$. Como eles são diferentes, as retas são concorrentes. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 2x - 5y + 1 = 0, \end{cases}$$

encontramos como ponto de interseção $\left(0, \dfrac{1}{5}\right)$.

2. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE)
Se a_r e a_s são seus coeficientes angulare, como elas são perpendiculares, teremos que $a_r \cdot a_s = -1$ e, portanto, $a_s = 2$. Ademais, teremos $b_s = \dfrac{9}{2}$, onde b_s é o coeficiente linear de s. Daí, obtemos $s: \ y = 2x + \dfrac{9}{2}$ e as retas se cruzarão no ponto que resolve o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ y = 2x + \dfrac{9}{2}, \end{cases}$$

que é $P = \left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$.

3. (Adaptado do vestibular da UEPG (PR))

I) Sendo a interseção vazia e as retas coplanares, então elas não têm ponto comum e o sistema tem solução vazia. Portanto, item certo!

II) A interseção é um reta, ou seja, um conjunto infinito de pontos, portanto o sistema será possível, mas indeterminada. Item errado.

III) Argumento do item anterior culminando na resposta correta.

IV) Item errada (ler item I.)

V) Se a interseção é um ponto, então a solução é possível e determinada. Item errado.

4. (Adaptado do vestibular da FUVEST (SP))
Podemos calcular $a_s = \dfrac{4-5}{2-0} = -\dfrac{1}{2}$. Como r e s são ortogonais, $a_r = 2$. Além disso, $a_r = \dfrac{b_r - 4}{0-2}$ resulta em $b_r = 0$. Então, chegamos a $r: \ y = 2x$.

5. (Adaptado do vestibular da UFMG (MG)
Podemos concluir que $a_r = \dfrac{1}{2}$, pois ela é paralela à equação do enunciado. Como ela passa pelo ponto $(16, 11)$, podemos escrever $a_r = \dfrac{k - 11}{7 - 16}$, o que resulta em $k = \dfrac{13}{2}$.

6. (Adaptado do vestibular da UFOP (MG)

(a) Como $u//r$ e $t \perp u$, então $t \perp r$.

(b) Sendo $r \perp s$, chegamos a $u \perp s$ e $t//s$.

(c) Por outro lado, para $v \perp s$, ficamos com $v//r$ e $v \perp t$.

(d) Por fim, é claro que $s//s$ (paralelas coincidentes) e o símbolo $\perp$ apareceu 5 vezes na tabela.

7. (Extraído do vestibular da MACK (SP)
Primeiramente, claramente devemos ter $m \neq 0$ para que a primeira equação determine uma reta. Agora, na primeira reta, seu coeficiente angular é $a = -m$ e $a' = -\dfrac{3}{m+1}$ é o da segunda. Para serem perpendiculares, deveremos ter a válida a relação $a \cdot a' = -1$. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} (-m) \cdot \left(-\frac{3}{m+1}\right) &= -1 \\ 3m &= -m - 1 \\ m &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular da ESPM (SP) $-$ 2013)
Temos que $B = (4, -2)$ e $C = (-4, 2)$ são os simétricos de A em relação aos eixos x e y, respectivamente. O coeficiente angular da reta BC é dado por $a_{BC} = \dfrac{2-(-2)}{-4-4} = -\dfrac{1}{2}$ e o coeficiente angular da reta que passa por A e é perpendicular a BC é, portanto, igual a 2. Por fim, como essa reta passa por $A = (4, 2)$, podemos escrever $2 = \dfrac{b-2}{0-4}$ e teremos $b = -6$. Portanto, a equação da reta pedida é $2x - y = 6$.

9. (Adaptado do vestibular da FURG (RS))
Como o ponto A pertence às retas r e s, podemos escrever que $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e então $3 = 2a + b$. Como $r \perp s$ e $a_r = 2$, então $a_s = -\dfrac{1}{2} = a$ e chegamos a $b = 4$.

10. (Extraído do vestibular da UFJF (MG))$-$ 2013
Sendo $r_1 // r_2$, então $m_1 = m_2$. Como $A \in r_1$, então $b_1 = 2$. Por outro lado, para $B \in r_2$, tem-se $m_2 + b_2 = 0$. Agora, calculando $a_l = \dfrac{0-2}{1-0} = -2$, concluímos, por $l \perp m_1$, que $m_1 = \dfrac{1}{2} = m_2$. Por fim, ficamos com $m_2 \cdot b_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

11. (Adaptado do vestibular da FGV $-$ 2012)
Como $r//s$ e são "crescentes", temos que $m_1 = m_2 > 0$.
Como $t//u$ e são "decrescentes", temos que $m_3 = m_4 < 0$.
Como r e t cortam y no mesmo ponto, então $n_1 = n_3 > 0$.
Como s e u cortam y no mesmo ponto, então $n_2 = n_4 < 0$.

Se supusermos que a figura formada é um quadrado, então também poderemos concluir que

$$m_1 = n_1 = m_2 = n_3 \text{ e } m_4 = n_4 = m_3 = n_2.$$

12. (Adaptado do vestibular da ESPM (SP) $-$ 2012)
A região hachura é a diferença entre o triângulo grande e um triângulo menor de base 6 e altura 2, ou seja, área igual a $\dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6$. A reta r tem coeficiente angular $a_r = \dfrac{2-0}{0-(-6)} = \dfrac{1}{3}$ e coeficiente linear $b_r = 2$, resultando na equação $r: \ y = \dfrac{x}{3} + 2$. Agora, como $r \perp s$, temos $a_s = -3$ e também $a_s = \dfrac{b_s - 0}{0-4}$, ou seja, $b_s = 12$. O que resulta em $s: \ y = -3x + 12$. Para encontrar a altura do triângulo grande, precisamos da ordenada y do ponto de interseção entre as retas, e isso pode ser calculado resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{3} + 2 \\ y = -3x + 12, \end{cases}$$

produzindo $x = y = 3$. Por fim, a área será igual a $\dfrac{10 \cdot 3}{2} - 6 = 9$ u.a..

13. (Extraído do vestibular da UNIFOR (CE) $-$ 2010)
Para $r//s$ devemos ter $\dfrac{k}{k+2} = \dfrac{1}{k}$, resultando em $k = -1$ ou $k = 2$.

14. (Adaptado do vestibular da UFV (MG) $-$ 2010)
Desenvolvendo os produtos notáveis que aparecem na equação, podemos reescrevê-la como $r: \ 2y = x$. Uma reta s perpendicular a r terá, portanto, coeficiente angular igual a -2. Se $(1,4) \in s$, teremos $-2 = \dfrac{b_s - 4}{0-1}$, onde b_s é seu coeficiente linear. Resolvendo a equação anterior, obtemos $b_s = 6$ e $s: \ y = -2x + 6$.

15. (Adaptado do vestibular do ITA (SP))
A simetria em relação ao eixo das abscissas leva cada ponto $A(x,y)$ em seu simétrico $A'(x,-y)$, então a equação de r será $x + 2y + 2 = 0$

16. (Adaptado Extraído do vestibular da UNIFOR (CE))
Escrevendo $t = y + 1$ e substituindo em $x = \dfrac{t+1}{3}$, ficamos com $3x = y + 2$ ou $y = 3x - 2$. Portanto o coeficiente angular é $a = 3$. Observe agora que:

a) para $x = 0$, $y = -2$;

b) para $x = -1$, $y = -5$;

c) o coeficiente angular de r é 3;

d) r só é paralela às retas com $a = 3$; e

e) r é perpendicular às retas com $a = -\dfrac{1}{3}$.

Portanto, a alternativa correta está na **letra E**.

17. (Extraído do vestibular da PUC (RJ) $-$ 2013)

a) Fazendo $x^2 - x + 1 = x + 1$, encontraremos $x = 0$ e $x = 2$. Substituindo em qualquer uma das fórmulas, encontraremos $y = 1$ e $y = 3$, respectivamente. Logo, $A = (0,1)$ e $B = (2,3)$.

b) Por outro lado, ao igualarmos $x^2 - x + 1 = x + b$ tem-se $x^2 + 2x + (1-b) = 0$. Essa equação possui $\Delta = 4b$, e para conseguirmos apenas uma raiz, basta fazermos $\Delta = 0$, ou seja, $b = 0$.

18. (Adaptado do vestibular da UNIFESP (SP))
Primeiro, perceba que a reta s tem que passar pelo centro do paralelogramo, ou seja, pelo ponto $\left(\dfrac{1+6}{2}, \dfrac{1+3}{2}\right)$ e $a_s = \dfrac{3}{5}$. Ademais, teremos que $a_s = \dfrac{b_s - 2}{0 - \dfrac{7}{2}}$ e assim encontraremos $b_s = -\dfrac{1}{10}$. Por fim, chegamos a $s: \ 6x - 10y - 1 = 0$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com