

Módulo Elementos Básicos de Geometria - Parte 3

Quadriláteros.

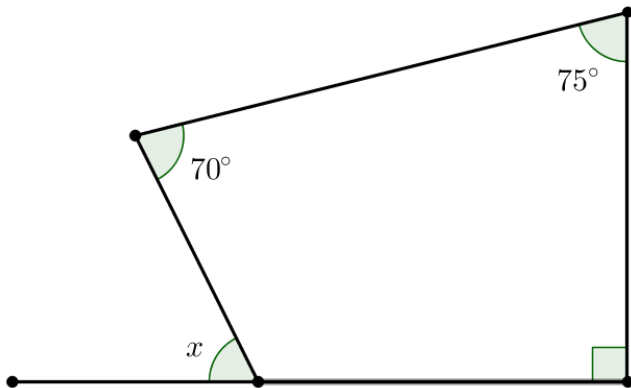
8º ano/E.F.

Professores: Cleber Assis e Tiago Miranda



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o valor de x no quadrilátero abaixo.



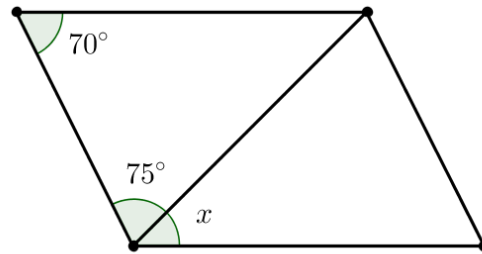
Exercício 2. Sobre paralelogramos, assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s).

- a) os lados opostos são congruentes.
- b) os ângulos opostos são suplementares.
- c) os lados opostos são paralelos.
- d) as diagonais interceptam-se nos pontos médios.
- e) os lados são congruentes.
- f) todo trapézio é um paralelogramo.

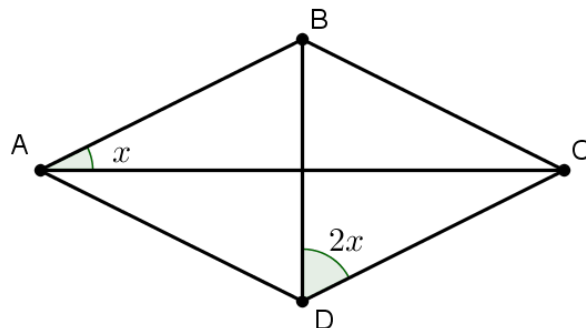
Exercício 3. Sobre losangos, assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s).

- a) os ângulos internos são congruentes.
- b) as diagonais são perpendiculares.
- c) as diagonais se interceptam nos pontos médios.
- d) os lados opostos são paralelos.
- e) os lados são congruentes.

Exercício 4. Calcule o valor de x no paralelogramo abaixo.



Exercício 5. Calcule o valor de x no losango abaixo.



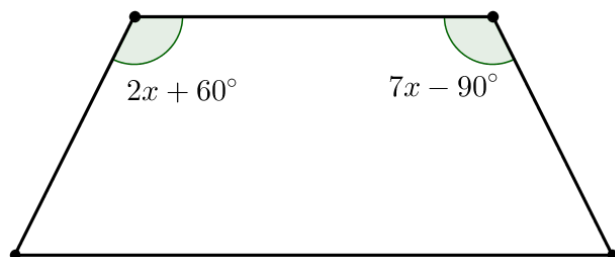
2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Dois dos lados não congruentes de um paralelogramo medem $2x + 5$ e $3x$, em centímetros. Se o perímetro desse paralelogramo é 100cm , determine o valor de x .

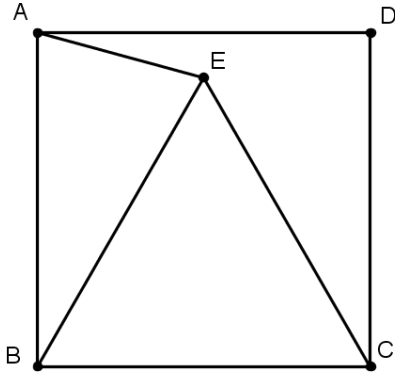
Exercício 7. As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero são $x + 5^\circ$, $x + 35^\circ$, $2x - 30^\circ$ e x . Determine o valor de x .

Exercício 8. Em um losango, o ângulo formado por uma diagonal e um lado mede 40° . Determine as medidas dos ângulos internos desse losango.

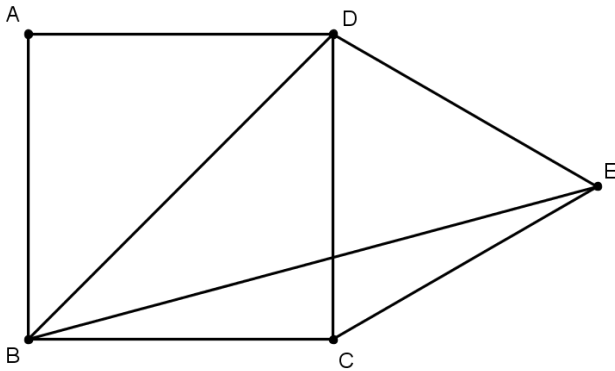
Exercício 9. Determine o valor de x , sabendo que o quadrilátero abaixo é trapézio isósceles.



Exercício 10. Determine a medida do ângulo $\angle AEB$ no quadrado $ABCD$ abaixo, sabendo que $\triangle BCE$ é equilátero.



Exercício 11. O quadrilátero $ABCD$, da figura abaixo, é quadrado e o triângulo $\triangle DCE$ é equilátero. Determine a medida do ângulo $\angle DBE$.

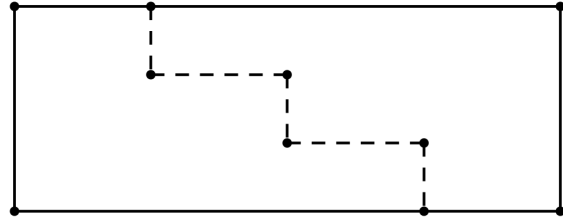


3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Juliana tem 8 cartões de papelão, retangulares e iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando apenas lados de mesma medida, a maior fila que ela poderá obter terá comprimento 176cm e a menor terá comprimento 96cm . Qual é o perímetro de cada cartão?

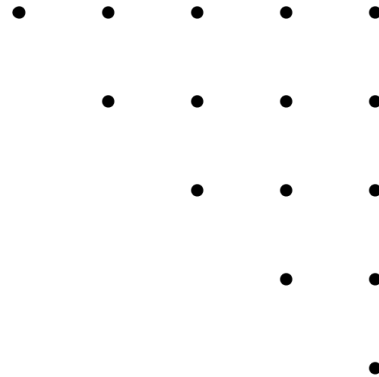
- a) 54cm .
- b) 68cm .
- c) 76cm .
- d) 80cm .
- e) 96cm .

Exercício 13. Um retângulo de papelão com 45cm de altura foi cortado em dois pedaços iguais, nos segmentos pontilhados da figura. Com esses dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45cm . Qual é o comprimento da base do retângulo?



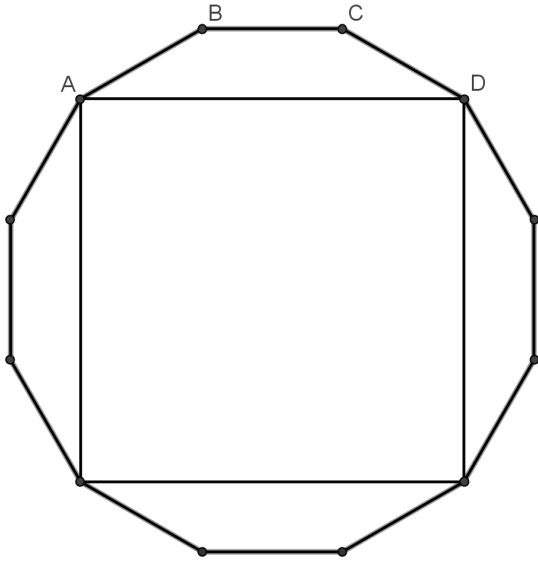
- a) 65cm .
- b) 70cm .
- c) 75cm .
- d) 80cm .
- e) 85cm .

Exercício 14. Quantos quadrados têm como vértices os pontos do reticulado abaixo?



- a) 6.
- b) 7.
- c) 8.
- d) 9.
- e) 10.

Exercício 15. A figura abaixo representa um dodecágono regular, qual a medida do ângulo $\angle BAD$ do trapézio $ABCD$?



- a) 15° .
- b) 30° .
- c) 45° .
- d) 60° .
- e) 75° .

Exercício 16. Tomando um quadrilátero convexo qualquer, mostre que os pontos médios são vértices de um paralelogramo.

Exercício 17. Seja AB e CD as bases de um trapézio tal que a medida da base menor CD é igual à soma das medidas dos lados não paralelos do trapézio. Se E é um ponto de CD e EA é a bissetriz do ângulo $\angle A$, mostre que EB é também bissetriz do ângulo $\angle B$.

Respostas e Soluções.

1. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° , temos:

$$\begin{aligned} 70^\circ + 75^\circ + 90^\circ + (180^\circ - x) &= 360^\circ \\ 415^\circ - x &= 360^\circ \\ x &= 55^\circ. \end{aligned}$$

2. As corretas são a, c, d.

3. As corretas são b, c, d, e.

4. Dois ângulos consecutivos quaisquer de um paralelogramo são suplementares. Sendo assim, temos que $70^\circ + 75^\circ + x = 180^\circ$, segue que $x = 35^\circ$.

5. Como os lados opostos do losango são paralelos, $\angle BAC \equiv \angle DCA$. Além disso, as diagonais são perpendiculares. Chamando essa interseção das diagonais de O , temos, pela soma dos ângulos internos de $\triangle DCO$, $x + 2x + 90^\circ = 180^\circ$, segue que $x = 30^\circ$.

6. Como lados opostos são congruentes, temos:

$$\begin{aligned} 2(2x + 5) + 2(3x) &= 100 \\ 4x + 10 + 6x &= 100 \\ 10x &= 90 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Temos então que $x = 9\text{cm}$.

7. Como as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero somam 360° , temos:

$$\begin{aligned} (x + 5^\circ) + (x + 35^\circ) + (2x - 30^\circ) + x &= 360^\circ \\ 5x + 10^\circ &= 360^\circ \\ x &= 70^\circ. \end{aligned}$$

8. Como as diagonais de um losango são bissetrizes, um dos ângulos internos mede $2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$. Além disso, dois ângulos consecutivos de um losango são suplementares, ou seja, outro ângulo mede $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Portanto, dois de seus ângulos medem 80° e outros dois medem 100° .

9. Como o trapézio é isósceles, os ângulos internos comuns a qualquer uma das bases são congruentes, ou seja, $2x + 60^\circ = 7x - 90^\circ$, segue que $x = 30^\circ$.

10. Se $\angle EBC = 60^\circ$, pois $\triangle BCE$ é equilátero, então $\angle ABE = 30^\circ$, pois $ABCD$ é quadrado. Além disso, $BE = BC$ e $BC = AB$, ou seja, $\triangle ABE$ é isósceles, sendo que $\angle BAE = \angle AEB$. Temos então, por $\triangle ABE$, $2\angle AEB + 30^\circ = 180^\circ$, segue que $\angle AEB = 75^\circ$.

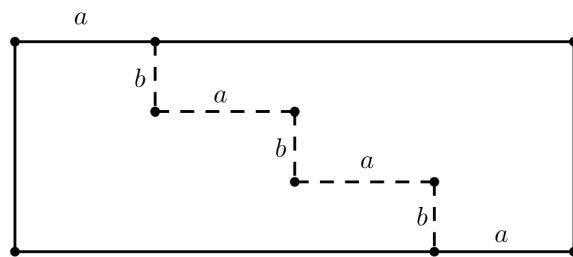
11. Como $\triangle DCE$ é equilátero, $\angle ECD = 60^\circ$ e $\angle BCE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Além disso, $\triangle BCE$ é isósceles, pois $DC = CE = BC$, e, por isso, $\angle CBE = \angle CEB = 15^\circ$. Temos então $\angle DBE = \angle CBD - \angle CBE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

12. (Extraído da OBMEP)

Vamos chamar o comprimento de cada cartão de x , em cm , e a altura de y , também em cm . Para Juliana obter o maior comprimento, ela deve enfileirá-los de maneira que os menores lados dos cartões coincidam. Assim ela obterá um retângulo maior com comprimento de $8x = 176$, segue que $x = 22\text{cm}$. Agora, para o menor comprimento, ela deverá fazer com que o maior lado dos cartões coincidam, obtendo comprimento do retângulo do conjunto de $8y = 96$, segue que $y = 12\text{cm}$. Temos então que o perímetro de cada cartão é $2 \cdot 22 + 2 \cdot 12 = 68\text{cm}$. Resposta B.

13. (Extraído da OBMEP)

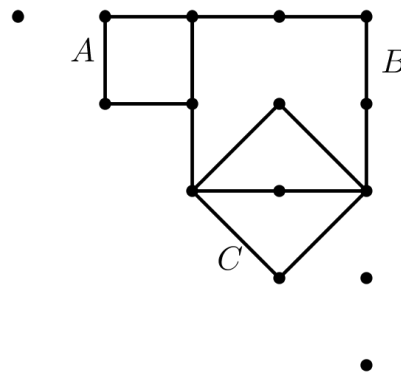
Para que seja possível o encaixe, alguns segmentos devem ter o mesmo comprimento. Vamos observar a figura.



Percebe-se que as dimensões do retângulo são $4a$ de comprimento por $3b = 45\text{cm}$ de largura; as do quadrado serão $4b$ por $3a$. Como $b = 15\text{cm}$, o lado do quadrado será 60cm , segue que $a = 20$ e o lado do retângulo $4 \cdot 20 = 80\text{cm}$. Resposta D.

14. (Extraído da OBM)

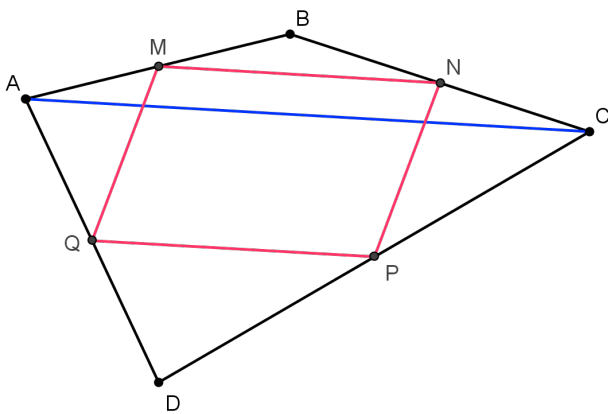
Vamos observar a figura e contar quantos quadrados existem do tipo A, do tipo B e do tipo C.



Temos 6 quadrados do tipo A, 1 do tipo B e 3 do tipo C, ou seja, 10 quadrados. Resposta E.

15. (Extraído da OBM - 2015) O ângulo interno do dodecaedro regular vale $\frac{180^\circ(12-2)}{12} = 150^\circ$. Assim, $\angle BAD = \frac{150^\circ - 90^\circ}{2} = 30^\circ$. Resposta B.

16. Supondo um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA e M , N , P e Q seus pontos médios respectivos. Como MN é base média de $\triangle ABC$, então $MN \parallel AC$ e $MN = \frac{AC}{2}$. De forma análoga, concluímos que $PQ \parallel AC$ e $PQ = \frac{AC}{2}$. Temos então que MN e QP são segmentos paralelos e congruentes, ou seja, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.



17. (Extraído da OCM) Como AE é bissetriz, então $\angle BAD = 2\angle BAE = 2\angle DAE$. Como $ABCD$ é um trapézio e, conseqüentemente, AB e CD são paralelos, $\angle EDA = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 2\angle DAE$. Pelo $\triangle ADE$, $\angle DEA = \angle DAE$, ou seja, $\triangle ADE$ é isósceles, sendo $DE = DA$. Se $DC = DA + BC$, então $EC = BC$, ou seja, $\triangle ECB$ é isósceles e $\angle ECB = \angle CBE$. Como AB é paralelo a CD , $\angle EBA = \angle ECB$, ou seja, $\angle EBA = \angle CBE$. Portanto, BE é bissetriz do ângulo $\angle B$.