Módulo Tópicos Adicionais

Contagem

Módulo Tópico Adicionais
Contagem

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. De quantos modos podemos colocar 10 garotos e 10 garotas em uma fila de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Exercício 2. Seja $E = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ o alfabeto de 26 letras. Encontre o número de palavras de 5 letras distintas que podem ser formadas de E de modo que a primeira e a última letra sejam vogais, e as três letras restantes sejam consoantes.

Exercício 3. De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não se ataquem?

Exercício 4. Existem apenas 6 letras no alfabeto de ABCDEFlândia. Uma palavra é qualquer sequência de seis letras em que pelo menos duas delas são iguais. Quantas palavras tem o alfabeto de ABCDEFlândia?

Exercício 5. Um milhão de árvores cresceram em uma floresta. Sabe-se que cada árvore tem no máximo 600000 folhas. Prove que existem duas árvores na floresta com a mesma quantidade de folhas.

Exercício 6. Em um país existem 20 cidades e quaisquer duas delas são ligadas por uma única estrada. Quantas estradas existem?

Exercício 7. Quantas diagonais existem em um polígono convexo de n lados?

Exercício 8. O Código Morse usa "palavras"contendo de 1 a 4 "letras", as "letras"sendo ponto e traço. João planeja decorar todas as "palavras"que existem no código morse. Sabendo que ele leva um minuto para decorar cada palavra, quanto tempo ele levará para decorar todas elas?

Exercício 9. Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um único candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuídos?

Exercício 10. Qual o número de funções $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ estritamente crescentes?

Exercício 11. Qual a quantidade de números de 5 dígitos com todos os seus dígitos ímpares?

Exercício 12. Considere m garotos e n garotas arranjados em uma fila, onde $m, n \in \mathbb{N}$. Encontre o número de maneiras de fazermos esses arranjos de modo que

i) Não existem restrições.

ii) Não existem garotos adjacentes ($m \leq n + 1$).

iii) As n garotas formam um um único bloco.

iv) Um garoto particular e uma garota particular têm que ser adjacentes.

Exercício 13. Determine o número de funções $f : \{1, 2, \ldots, 1999\} \longrightarrow \{2000, 2001, 2002, 2003\}$ satisfazendo a condição de que $f(1) + f(2) + \ldots + f(1999)$ é ímpar.

Exercício 14. Encontre o número de triplas de conjuntos (A, B, C) tais que $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 2003\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Exercício 15. Encontre o número de quádruplas ordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) de inteiros positivos ímpares que satisfazem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98.$$

Exercício 16. Nove cadeiras em uma sala irão ser ocupadas por 6 estudantes e 3 professores chamados de A, B e C. Os professores chegam antes dos alunos decidem escolher suas cadeiras de modo que cada um deles fique entre dois alunos. De quantas maneiras os três professores podem escolher seus lugares?

Exercício 17. Nós chamamos um número de telefone $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ de *legal* se o número $d_1d_2d_3$ é igual a $d_4d_5d_6$ ou a $d_5d_6d_7$. Assuma que cada d_i pode ser qualquer dígito de 0 a 9. Quantos telefones legais existem?

Exercício 18. O número 3 pode ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos de 4 maneiras diferentes:

$$3, \quad 1+2, \quad 2+1, \quad 1+1+1.$$

Mostre que todo inteiro n pode ser expresso de exatamente 2^{n-1} maneiras diferentes como soma de inteiros positivos.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 19. Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para $0 \leq r \leq n$, uma r-permutação de A é o número de maneiras de arranjar quaisquer r elementos de A em uma fila. Quando $r = n$, uma n-permutação de A é simplesmente chamada de permutação. Esse número será denotado por P_r^n. Já sabemos que o número de r-permutaões de um conjunto de n elementos é

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Observação: Por convenção, $0! = 1$. Veja que $P_0^n = 1$ e $P_n^n = n!$. Sejam $n, r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$. Prove cada uma das seguintes identidades:

i) $P_r^n = \frac{n}{n-r} P_r^{n-1}$ onde $r < n$,

ii) $P_r^{n+1} = P_r^n + r P_{r-1}^n$,

iii) $P_r^{n+1} = r! + r(P_{r-1}^n + P_{r-1}^{n-1} + \ldots + P_{r-1}^r)$.

Exercício 20. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Exercício 21. Considere um inteiro positivo a com $mdc(a, 10) = 1$.

(a) Prove que existe um múltiplo de a com todos os seus dígitos iguais a 1.

(b) Prove que para qualquer n natural, existe uma potência de a terminando em $\underbrace{000\ldots1}_{n}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 22. Dois quadrados de um tabuleiro 7×7 são pintados de amarelo e o resto é pintado de verde. Dois esquemas de cores são equivalentes se um pode ser obtido do outro aplicando uma rotação no plano do tabuleiro. Quantos esquemas de cores não equivalentes podemos obter?

Exercício 23. Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que as 8 meias e os 8 sapatos são distintos e que cada meia precisa ser colocada antes do seu respectivo sapato?

Exercício 24. Sejam $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$ e $S = \{(a, b, c) | a, b, c \in X, a < b \text{ e } a < c\}$. Encontre $\#S$.

Exercício 25. Considere o conjunto $M = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ e seu subconjunto A formado por todos os inteiros positivos da forma $m^2 + k^3$ com m e n também inteiros positivos. Quem tem mais elementos: A ou $M \backslash A$?

Exercício 26. Prove usando argumentos combinatórios as seguintes afirmações:

(a) (Relação de Stifel) $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$.

(b) $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$.

Exercício 27. Mostre usando um argumento combinatório que:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Exercício 28. Mostre usando um argumento combinatório que: $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$

Exercício 29. Mostre usando um argumento combinatório que:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercício 30. Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática. A prova possuía 6 problemas. Sabemos que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois participantes de modo que para qualquer problema, pelo menos um deles dois conseguiu uma solução correta.

Exercício 31. Há n tipos de doce na loja do Zé. Um dia, m amigos se juntam para comprarem k doces diferentes cada um. Cada tipo de doce é comprado por r dos amigos. Cada par de tipo de doces é escolhido por t amigos. Prove que:

(i) $mk = nr$;

(ii) $r(k-1) = t(n-1)$.

Exercício 32.

a) João arranjou 13 palitos no formato de um cercado retangular 1×4 como mostrado na figura abaixo. Cada palito é o lado de um quadradinho 1×1 e no interior de cada um destes quadradinhos ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 4 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?

b) João agora arranjou 24 palitos no formato de um cercado quadrado 4×4 como mostrado na figura abaixo e no interior de cada um destes quadradinhos, ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 9 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?

Exercício 33. Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

Exercício 34. (a) Mostre que se escolhermos mais que n inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ existirão dois inteiros a e b tais que um dividirá o outro.

(b) Mostre que se escolhermos mais que n inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ exitirá um par de inteiros primos entre si.

Exercício 35. Dado um conjunto de pessoas, formam-se comitês compostos de r pessoas cada e de modo que dados quaisquer $r + 1$ comitês, existe pelo menos uma pessoa que está em todos esses comitês. Mostre que existem uma pessoa que está em todos os comitês.

Exercício 36. Um quadrado Latino é um tabuleiro $n \times n$ preenchido com n símbolos distintos de modo que em cada linha e em cada coluna não existam símbolos repetidos. Sabemos que existem 576 Quadrados Latinos distintos de dimensões 4×4. De quantos modos podemos completar o quadrado abaixo, que já possui duas casas preenchidas, com os algarismos $1, 2, 3$ e 4 de modo que em cada linha e coluna figurem os quatro algarismos?

Exercício 37. Existem $2m$ miçangas de m cores distinas, sendo duas de cada cor. Essas miçangas são distribuidas em

m caixas, com duas em cada caixa, de modo que é possível escolher uma miçanga em cada uma delas e obter um conjunto de m miçangas de cores distintas. Prove que o número de maneiras de fazermos esse tipo de escolha é necessariamente uma potência de 2.

Exercício 38. João trabalha vendendo pacotes de previsão astrológica. Para incrementar as vendas de suas previsões, ele oferece descontos caso pessoas de um mesmo signo queiram contratar seus serviços. No Horóscopo Grego, como existem exatamente 12 signos, ele sabe que em um grupo de 13 pessoas sempre duas delas terão o mesmo signo e poderão se interessar pelo pacote promocional.

a) Qual o número mínimo de pessoas que um grupo deve possuir para ele ter certeza de que existirão pelo menos 3 pessoas de um mesmo signo do Horóscopo Grego?

b) No horóscopo Chinês, também existem exatamente 12 signos. Se João quiser ter certeza de que, em determinado grupo de pessoas existirão duas possuindo exatamente os mesmos signos, tanto no Horóscopo Grego quanto no Horóscopo Chinês, qual o número mínimo de pessoas que tal grupo deve ter?

Exercício 39. Uma roleta circular possui 7 seções de igual tamanho e cada uma delas será pintada com uma dentre duas cores. Duas colorações são consideradas equivalentes se uma pode ser rotacionada para produzir a outra. De quantas maneiras a roleta pode ser pintada?

Respostas e Soluções.

1. Considerando apenas o sexo de cada pessoa, existem duas distribuições possíveis para garantir a alternância, a saber, ou começamos com um garoto ou com uma garota e as posições restantes ficam determinadas. Feita essa escolha, existem 10! possíveis distribuições dos garotos e, para cada uma dessas distribuições, existem 10! distribuições das garotas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem $2 \cdot 10! \cdot 10!$ escolhas.

2. Podemos escolher as vogais (em ordem) de $5 \cdot 4$ formas e escolher as consoantes (em ordem) de $21 \cdot 20 \cdot 19$ maneiras. Assim, o número de palavras é $5 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 159600$.

3. Um rei ao ser colocado no tabuleiro, além de ocupar uma casa, ameça uma certa quantidade de quadradinhos que depende da posição em que ele é inserido. Se o rei é colocado em um dos 4 cantos, ele ameça 3 outras casas e assim restam $64 - 3 - 1 = 60$ posições possíveis para o outro rei. Se ele é colocado em algum quadradinho no bordo que não é um dos cantos, ele ameaça 5 outras casas e assim restam $64 - 5 - 1 = 48$ posições possíveis para o outro rei. Finalmente, se o rei é colocado no tabuleiro 6×6, que forma o interior do tabuleiro 8×8, ele ameaça 8 outras casas e assim restam $64 - 8 - 1 = 53$ posições possíveis para o outro rei. Existem, respectivamente, 4, 24 e 36 casas nos cantos, no bordo e no interior do tabuleiro. Portanto, o total de maneiras de colocarmos o rei branco e posteriormente o rei preto no tabuleiro é

$$4 \cdot 60 + 24 \cdot 48 + 36 \cdot 53.$$

4. Se não considerarmos a restrição das duas letras iguais, pelo Princípio Multiplicativo existem 6^6 palavras com seis letras. Destas, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possuem todas as letras distintas. Portanto, existem $6^6 - 120$ palavras de seis letras com pelo menos duas letras iguais.

5. Como existem mais árvores do que o número de possibilidades de folhas, pelo Principío da Casa dos Pombos, pelo menos duas delas terão a mesma quantidade de folhas.

6. Cada escolha de duas cidades corresponde a uma única estrada. Existem $\binom{20}{2} = 190$ estradas.

7. Cada diagonal do polígono pode ser associado a uma escolha de dois vértices que não são vizinhos. Existem $\binom{n}{2}$ pares de vértices e n pares de vértices vizinhos. Portanto, existem $\binom{n}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

8. Fixado o número n de letras de uma palavra, existem 2^n maneiras de escolhermos as letras de cada uma de suas posições. Como nenhuma palavra do Código Morse possui mais de 4 letras, o total de palavras é $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.

9. As escolhas dos examinadores podem ser simbolizadas por uma 5-upla da forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ em que cada a_i é um dentre três símbolos, associados aos três candidatos. Como cada a_i pode ser escolhido de 3 formas, existem 3^5 distribuições de votos.

10. **Primeira Solução:** Como as imagens são elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, basta escolhermos três elementos quaisquer, que pode ser feito de $\dbinom{n}{3}$ formas, e associar o menor deles como imagem de 1, o segundo menor como imagem de 2 e o terceiro menor como imagem de 3. Isso garantirá que a função é crescente.
Segunda Solução: Consideremos a tripla $(f(a), f(b), f(c))$. Como a função é crescente, sabemos que os seus elementos são distintos e que $f(a) < f(b) < f(c)$. Para contar a quantidade de tais triplas, escolha o valor de $f(a)$ de n maneiras, o valor de $f(b)$ de $n-1$ maneiras, pois não podemos repetir o valor já escolhido para $f(a)$ e, finalmente, escolha $f(c)$ de $n-2$ maneiras. As escolhas podem ser agrupadas em conjuntos de $3! = 6$ triplas contendo o mesmo conjunto de elementos $\{f(a), f(b), f(c)\}$. Em cada um desses agrupamentos de triplas, apenas um de seus elementos satisfaz a condição $f(a) < f(b) < f(c)$. Portanto, o conjunto de funções é igual ao conjunto de agrupamentos de triplas, ou seja, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = \dbinom{n}{3}$.

11. O conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ contém todos os dígitos ímpares. Escolheremos os dígitos do número $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ da esquerda para a direita. Para cada dígito, temos 5 opções. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, teremos $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ inteiros.

12.

i) Com $m + n$ pessoas, existem $(m+n)!$ permutações.

ii) Podemos dispor as garotas de $n!$ formas. Uma vez que a ordem delas esteja definido, podemos escolher as posições dos garotos nos $n+1$ espaços definidos entre elas e os seus extremos. Isso pode ser feito de $(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+2) = \dfrac{(n+1)!}{(n-m+1)!}$. A ordem entre os garotos para ocupar uma das escolhas de posições pode ser definida de $m!$ formas. Portanto, o número de disposições é $n! \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n-m+1)!} \cdot m!$.

iii) Se as n garotas formam um bloco, podemos considerá-la momentaneamente como uma única pessoa X. Essa pessoa e os m garotos podem ser dispostos em fila de $(m+1)!$ formas. A pessoa X pode ser trocada pela lista de garotas de $n!$ formas, pois esse é o número de permutações dessas pessoas. Portanto o número procurado é $m! \cdot (n+1)!$.

iv) Esse garoto e essa garota podem ser unificados e formar uma única pessoa chamada Y. Podemos arranjar Y e as outras $m+n-2$ pessoas de $(m+n-1)!$. As pessoas que formam Y pode ser arranjadas de duas formas na fila. Portanto, existem $2(m+n-1)!$ permutações em que essas duas pessoas estão juntas. Assim, exsitem $(m+n)! - 2(m+n-1)!$ permutações em que essas duas pessoas não estão juntas.

13. Podemos escolher os valores de $f(1), f(2), \dots, f(1998)$ de 4^{1998} formas. Uma vez que eles tenham sido escolhidos e que saibamos a paridade de $f(1) + f(2) + \dots + f(1998)$ existem apenas duas opções possíveis em $\{2000, 2001, 2002, 2003\}$ para o valor de $f(1999)$ de modo que a soma seja ímpar. Portanto, existem $4^{1998} \cdot 2$ funções possíveis.

14. Cada tripla pode ser codificada com uma pintura dos inteiros do cojunto $\{1, 2, \dots, 2003\}$ com símbolos do conjunto $\{A, B, C, AB, AC, BC\}$. Se um inteiro for pintado com o símbolo BC, isso significa que ele deve ser colocado apenas nos conjuntos B e C e se ele for pintado com a cor A ele deve ser colocado apenas no conjunto A. Os outros símbolos são interpretados de forma análoga. Com esses símbolos, cada inteiro será inserido em pelo menos um dos três conjuntos e nenhum elemento estará na interseção dos três. Isso garante as condições do enunciado. Como cada inteiro pode receber um dentre os 6 símbolos, existem 6^{2003} triplas.

15. Como x_i é ímpar, podemos escrevê-lo como $x_i = 2y_i + 1$, com $y_i \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 98 \\ (2y_1 + 1) + (2y_2 + 1) + (2y_3 + 1) + (2y_4 + 1) &= 98 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 47. \end{aligned}$$

O número de soluções dessa equação é igual ao número de disposições de 47 bolas e $4 - 1 = 3$ barras em linha. Portanto, o número de soluções é $\binom{47+3}{3}$.

16. Dada uma fila de 6 cadeiras que serão ocupadas por alunos, existem 5 espaços entre elas e em cada um deles pode ficar no máximo um professor. Podemos então escolher as posições dos três professores de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras.

17. Se $d_1d_2d_3$ é simultaneamente igual a $d_4d_5d_6$ e $d_5d_6d_7$, então todos os dígitos são iguais. Para contar o número de telefones com $d_1d_2d_3$ é igual a $d_4d_5d_6$, basta escolhermos $d_1d_2d_3$ de 10^3 maneiras e o valor de d_7 de 10 maneiras. Portanto, existem 10^4 telefones com $d_1d_2d_3$ igual a $d_4d_5d_6$. Analogamente, existem 10^4 números telefones com $d_1d_2d_3$ igual a $d_5d_6d_7$. Descontando os números de telefones que estão em ambos os grupos, temos $2 \cdot 10^4 - 10$ números de telefone legais.

18. Considere uma sequência de n números 1's com espaços entre eles como indicado na figura abaixo:

$$(1\_\_1\_\_1\_\_\dots\_\_1\_\_1\_\_).$$

Cada um desses $n - 1$ espaços será preenchido com ")+(" ou "+". Um preenchimento corresponde a uma escrita ordenada de n como soma de inteiros positivos. Por exemplo, se $n = 4$, o preenchimento de $(\_\_1\_\_1\_\_1\_\_1\_\_)$ da forma

$$(1 + 1) + (1) + (1)$$

significa a soma ordenada $2 + 1 + 1$. Existem 2^{n-1} preenchimentos e, consequentemente, 2^{n-1} somas ordenadas em inteiros positivos.

19.

(a) Temos

$$\begin{aligned} P_r^n &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n}{n-r} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} \\ &= \frac{n}{n-r} \cdot P_r^{n-1} \end{aligned}$$

(b) Temos

$$\begin{aligned} P_r^{n+1} &= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} \\ &= \frac{[(n+1-r)+r]n!}{(n+1-r)!} \\ &= \frac{(n+1-r)\cdot n!}{(n+1-r)!} + \frac{r \cdot n!}{(n+1-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} + r \cdot \frac{n!}{(n+1-r)!} \\ &= P_r^n + rP_{r-1}^n. \end{aligned}$$

(c) Pelo item anterior, temos

$$\begin{aligned} P_r^{n+1} &= \cancel{P_r^n} + rP_{r-1}^n \\ \cancel{P_r^n} &= \cancel{P_r^{n-1}} + rP_{r-1}^{n-1} \\ \cancel{P_r^{n-1}} &= \cancel{P_r^{n-2}} + rP_{r-1}^{n-2} \\ &\dots \\ \cancel{P_r^{r+2}} &= \cancel{P_r^{r+1}} + rP_{r-1}^{r+1} \\ \cancel{P_r^{r+1}} &= P_r^r + rP_{r-1}^r \end{aligned}$$

Somando as equações e cancelando os termos que aparecem em ambos os membros, temos

$$P_r^{n+1} = r! + r(P_{r-1}^n + P_{r-1}^{n-1} + \dots + P_{r-1}^r).$$

20. Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada exatamente duas vezes. Logo, o número obtido tem que ser par e isso claramente entra em contradição com o valor 63 obtido na primeira contagem.

21.

(a) Considere a lista de inteiros

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 11 \\ x_3 &= 111 \\ &\dots \\ x_a &= \underbrace{111\dots11}_{a \text{ vezes}} \\ x_{a+1} &= \underbrace{111\dots11}_{a+1 \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Como existem apenas a restos na divisão por a e lista anterior possui $a+1$ números, pelo menos dois deles, digamos x_i e x_j, possuem o mesmo resto. Daí, $x_i - x_j = \underbrace{111\ldots11}_{i-j \text{ vezes}} \cdot 10^j$ é múltiplo de a. como $mdc(a,10) = 1$, segue que $\underbrace{111\ldots11}_{i-j \text{ vezes}}$ é múltiplo de a.

(b) Considere as potências a^k com $k \geq 1$. Como a quantidade restos na divisão por 10^n é finita e a quantidade de potências é infinita, existem duas delas com o mesmo resto na divisão por 10^n, digamos a^i e a^j. Daí $a^i - a^j = a^j(a^{i-j} - 1)$ é múltiplo de 10^n. Como $mdc(a,10) = 1$, segue que $a^{i-j} - 1$ é multiplo de 10^n, ou seja, a^{i-j} termina em $\underbrace{000\ldots1}_{n}$.

22. (Extraído da AIME 1996) Como o tabuleiro possui $7 \cdot 7 = 49$ quadrados, existem $\binom{49}{2} = 1176$ maneiras de escolhermos dois deles para receberem a cor amarela. Quando eles não são diametralmente opostos, podemos rotacioná-los em 90° três vezes e obter configurações que geram esquemas equivalentes. Para contarmos os pares de quadrados diametralmente opostos, escolha um quadrado distinto do cetro de $49 - 1$ formas. O outro quadrado está completamente determinado por essa escolha. Entretanto, como a ordem de escolha entre eles é irrelevante, o total de pares é $\dfrac{49-1}{2} = 24$. Cada um desses 24 esquemas pode ser rotacionado uma vez por 180° gerando outro equivalente. Portanto, o número de esquemas é

$$\frac{1176 - 24}{4} + \frac{24}{2} = 300$$

23. (Extraído da AMC) Se simbolizarmos as meias por $\{m_1, m_2, \ldots, m_8\}$ e os sapatos por $\{s_1, s_2, \ldots, s_8\}$, podemos interpretar cada palavra com essas 16 letras como uma ordem de usos desses objetos. Por exemplo, a palavra

$$m_1 m_2 s_1 s_2 s_3 s_4 m_5 \ldots s_8$$

indica que a aranha colocará inicialmente a meia m_1, depois a meia m_2, o sapato s_1, o sapato s_2 etc. Existem $16!$ permutações desses 16 símbolos. Por simetria, em metade deles, o símbolo m_1 vem antes do s_1 e na outra metade ocorre o contrário. Dessa metade em que m_1 vem antes de s_1, em metade deles o símbolo m_2 vem antes de s_2. Repetindo esse argumento, podemos concluir que existem $\dfrac{16!}{2^8}$ sequências em que o símbolo m_i vem antes de s_i para todo i. Esse é o número procurado.

24. Como $a < b \Rightarrow a \in \{1, 2, \ldots, 99\}$. Se $a = k$ então temos $100 - k$ possibilidades para b e c. Assim , pelo Principío Multiplicativo, o número de ternos (k, b, c) é $(10-k)^2$. Variando k podemos encontrar $\#S = 99^2 + 98^2 + \ldots + 1^2 = 328350$ [1].

[1] Estamos usando a conhecida fórmula $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

25. Como m e k são inteiros positivos e $m^2 + k^3 \leq 10^6$, existem no máximo 10^3 possibilidades para m e 10^2 possibilidades para k. Assim, o conjunto A possui menos que $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$ elementos, pois nem todos os pares (m,k) com $1 \leq m \leq 10^3$ e $1 \leq k \leq 10^2$ satisfazem $m^2 + k^3 \leq 10^6$. Por exemplo, $(m,k) = (10^3, 10^2)$ não satisfaz isso. Assim, o complementar de A possui mais que $10^6 - 10^5 = 9 \cdot 10^5$ elementos. Como $10^5 < 9 \cdot 10^5$, segue que o complementar de $M \backslash A$ possui mais elementos que A.

26.

(a) O lado direito conta o número de maneiras de escolhermos $r+1$ pessoas em um grupo de $n+1$. Podemos dividir essas escolhas em dois grupos: aquelas que contém um certo indivíduo previamente destacado ($\binom{n}{r}$) e aquelas que não o contém ($\binom{n}{r+1}$).

(b) O lado esquerdo conta o número de maneiras de escolhermos $n+1$ pessoas no grupo da $2n+2$ pessoas que estão comemorando o aniverário da Ana e do joão. Essas escolhas se dividem em três grupos, aquelas que não contém Ana e João ($\binom{2n}{n+1}$), aquelas que contém apenas um dos dois ($2\binom{2n}{n}$) e aquelas que contém ambos ($\binom{2n}{n-1}$).

27. Suponha que exista uma fila de $n+1+k$ pessoas. As primeiras $k+1$ pessoas são $c_0, c_1, \ldots, c_k$ e estão ordenadas pelas suas alturas. O lado direito conta o número de maneiras de escolhermos $n+1$ pessoas nesse grupo. Certamente precisaremos escolher alguém do conjunto $\{c_0, c_1, \ldots, c_k\} = C$. Seja C_i o conjunto das escolhas em que o menor elemento de C escolhido é c_i. Qualquer escolha faz parte de algum desses C_i's. Para calcular o número de elementos de C_i, veja que c_i deve fazer parte dessa escolha e os outros n elementos devem ser escolhidos dentre os elementos posteriores a c_i, i.e., temos $n+k+1-i$ candidatos. Logo,

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} |C_i| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n}.$$

28. Vamos contar o número de maneiras de escolhermos algumas crianças para passearem e, além disso, uma delas para ganhar um sorvete. Como a criança que ganhará o sorvete certamente estará no passeio, podemos começar escolhendo-a. Podemos fazer isso de n maneiras. Das crianças que restaram, devemos escolher algum subconjunto para acompanhar a primeira criança, podemos fazer isso de 2^{n-1} maneiras, isso nos dá o lado direito. Por outro lado, para cada $k \geq 1$, podemos escolher k crianças ($\binom{n}{k}$) e, posteriormente, podemos escolher uma delas para ganhar o sorvete de k maneiras. A soma sobre todos os k, contará todos os conjuntos, como está escrito no lado esquerdo.

29. Vamos construir uma situação semelhante ao problema anterior, sendo que agora seremos mais bondosos, além de escolher uma criança para ganhar um sorvete também escolheremos uma criança para ganhar um caramelo (a criança pode ser a mesma). O lado esquerdo conta essas escolhas como no problema anterior. Agora queremos contar o número de maneiras de primeiro escolhermos as crianças que vão receber as guloseimas e depois aquelas que irão acompanhá-las.

Se essas duas crianças são diferentes, temos $n(n-1)2^{n-2}$ escolhas. Se essas crianças são iguais, temos $n2^{n-1}$ escolhas. Agora basta ver que:

$$n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

30. Façamos um tabuleiro 200×6 representando o resultado dos estudantes. Cada linha representará um estudante e cada problema resolvido pelo estudante i será marcado com o número 1 na tabela. Caso o problema não tenha sido resolvido, marcaremos o número zero. Pensemos inicialmente em casos extremais. O que acontece se um estudante resolveu os seis problemas? Basta escolhermos um estudante qualquer e a dupla desejada estará formada. Se um estudante resolveu 5 problemas, também podemos obter facilmente nossa dupla. E se um estudante tiver resolvido exatamente 4 problemas? Suponha, sem perda de generalidade, que ele não resolveu os problemas 5 e 6. Sabemos que pelo menos 120 pessoas resolveram o problema 5. Se nenhuma delas tiver resolvido o problema 6, saberemos que no máximo 80 pessoas o resolveram. Mas isso contradiz o enunciado e assim temos certeza que pelo menos uma pessoa resolveu ambos os problemas. Resta mostrar que esse tipo de situação sempre acontece, i.e., existe alguém que resolveu pelo menos 4 problemas. Agora usaremos a contagem dupla. A soma dos número das colunas é pelo menos $6 \times 120 = 720$. Como existem 200 linhas, pelo menos uma delas terá soma $\frac{720}{200} > 3$, ou seja, pelo menos uma linha terá 4 números 1's.

31. O número de doces levados da loja é mk. Como cada doce é levado por r amigos, esse número também é nr. Quantos pares de doces são levados? Pela última informação do enunciado, esse número é $t\binom{r}{2}$. Por outro lado, cada amigo leva $\binom{k}{2}$ pares de doces, logo:

$$\begin{aligned} t\binom{r}{2} &= m\binom{k}{2} \\ t\frac{r(r-1)}{2} &= m\frac{k(k-1)}{2} \\ t\frac{r(r-1)}{2} &= \frac{nr(k-1)}{2} \\ r(k-1) &= t(n-1) \end{aligned}$$

32.

a) É possível libertarmos todas as formigas removendo 4 palitos como indica a figura a seguir.

Como cada palito é compartilhado por no máximo dois quadrados e cada quadrado deve possuir pelo menos uma lateral aberta para que a formiga em seu interior possa fugir, para usarmos 3 ou menos palitos, somos obrigados a remover pelo menos um palito do interior que é lateral de dois quadrados. A remoção de um destes palitos aglutina o interior de dois quadradinhos num compartimento maior e, do ponto de vista prático, transforma o problema de libertar 4 formigas em um cercado 1×4 no problema de libertarmos 3 formigas em um cercado 1×3. Se é possível removermos 3 ou menos no cercado 1×4, também deve ser possível libertarmos as formigas de um 1×3 usando 2 ou menos palitos. Pelo mesmo argumento inicial, isto nos força a remover pelo menos um palito interior e assim, o problema é novamente transformado em libertarmos duas formigas em um cercado 1×2 removendo apenas um palito. Isto é claramente impossível, tanto removendo o único palito interior como um palito do bordo de tal cercado. Logo, o mínimo de palitos que devem ser removidos neste caso é 4.

b) É possível libertarmos todas as formigas removendo 9 palitos como indica o exemplo da esquerda da figura a seguir

Durante a retirada sucessiva de palitos para a libertação das formigas, chamemos em qualquer momento por compartimento qualquer linha poligonal fechada de palitos sem possuir em seu interior uma outra linha poligonal fechada de palitos. Por exemplo, na figura da direita acima, onde foram removidos 6 palitos, temos 3 compartimentos indicados por três tipos de preenchimentos distintos. Veja que a remoção de um palito diminui o número de compartimentos em no máximo uma unidade. Portanto, como temos inicialmente 9 compartimentos e queremos que no final nenhuma formiga fique presa em qualquer tipo de compartimento, devemos remover pelo menos 9 palitos.

33. **Solução:** Somemos a maior quantidade de bolas que podem ser retiradas de cada tipo sem que obtenhamos 12 bolas de cada cor:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 &\quad + \\ 11 + \underbrace{11+11+\ldots+11}_{2005 \text{ vezes}} &\quad = \quad 22121. \end{aligned}$$

Assim, é possível que tenhamos azar e retiremos tal quantidade de bolas sem obtermos 12 bolas de cada cor. Entretanto, se retirarmos 22122 bolas, certamente teremos 12 bolas de uma mesma cor, pois a soma anterior conta exatamente o máximo de bolas que podem ser retiradas sem que isto ocorra. Logo, o mínimo buscado é 22122.

34.

a) Todo natural m pode ser escrito na forma $m = 2^a b$ onde b é impar(2^a é a maior potência de 2 que divide m e b é parte ímpar de m). Existem n números ímpares no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, logo, existem no máximo n partes impares distintas. Como iremos escolher $n+1$ números, pelo

Princípio da Casa dos Pombos, iremos escolher dois com a mesma parte ímpar. Assim um dividirá o outro.

b) Podemos dividir os números do nosso conjunto em n pares : $(1,2),(3,4),\ldots,(2n-1,2n)$. Como devemos escolher $n+1$ números, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos em um par deveremos escolher seus dois elementos. Como esses números são consecutivos, eles serão primos entre si.

35. Considere um comitê qualquer chamado de $C = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r\}$. Suponha, por absurdo, que nenhuma dessas pessoas está em todos os comitês. Então, para cada pessoa p_i, existe um comitê C_i do qual p_i não faz parte. O conjunto dos $r+1$ comitês $\{C, C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ contradiz a informação do enunciado, pois nenhuma pessoa está em todos eles. Esse absurdo mostra que existe uma pessoa em todos os comitês.

36. Observe que dado um Quadrado Latino, quando trocamos todas as casas de um símbolo pelas casas de outro, ainda obtemos outro Quadrado Latino. No exemplo dado no enunciado, ao trocarmos as casas de número 1 e 2 de posição, obtemos:

Isso nos permite construir uma correspondência biunívoca entre todos os Quadrados Latinos que possuem no canto superior esquerdo um símbolo em $\{1,2,3,4\}$ e todos os outros Quadrados Latinos com outro símbolo no mesmo conjunto. Daí, em $1/4$ do total de Quadrados Latinos 4×4 deve possuir o algarismo 1 na casa do canto superior esquerdo. Dentre esses quadrados, qualquer permutação entre os símbolos de $\{2,3,4\}$ ainda irá gerar um quadrado onde a casa do canto superior esquerdo tem o símbolo 1.

Portanto, em um terço dessas configurações o algarismo 2 se encontra na posição X, em outro terço na posição Y e no último terço na posição Z dos quadrados da primeira linha da figura anterior. Logo, o total de Quadrados Latinos procurados é

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 576 = 48.$$

37. Antes de descrevermos a solução para o caso geral, considere o caso particular com $m = 5$, em que as cores das miçangas serão denotadas por A, B, C, D e E, com as seguintes distribuições de caixas:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A,B	B,C	C,A	D,E	$D,E.$

Contemos agora o número de escolhas de miçangas, uma de cada caixa, de modo que todas as escolhidas sejam de cores distintas. Analisando as duas últimas caixas, se escolhermos uma cor em C_4, somos forçados a escolher a outra cor em C_5. Essas escolhas não interferem nas escolhas das cores das primeiras caixas. Se escolhermos A em C_1, somos obrigados a escolher B em C_2 e C em C_3. Por outro lado, se escolhermos B em C_1, temos que escolher C em C_2 e A em C_3. Ou seja, existem 2 escolhas para as cores retiradas das três primeiras caixas e 2 para as das duas últimas. Essas $2 \cdot 2 = 4$ escolhas totalizam o número de maneiras de escolhermos 5 miçangas distintas nesse exemplo particular.

Para o caso geral, considere uma caixa genérica, que chamaremos de C_1 e denote por m_1 a cor de uma de suas miçangas. Em seguida, escolha uma outra caixa, que chamaremos de C_2, contendo uma miçanga de uma cor, que chamaremos de m_2, presente em C_1, mas distinta da cor m_1. Escolha agora um caixa C_3 contendo uma miçanga de cor m_3 presente em C_2, mas diferente de m_2. Continue esse processo até, eventualmente, obtermos para algum l que $C_l = C_1$. Isso se traduz na seguinte distribuição:

C_1	C_2	C_3	$\ldots$	C_{l-1}
m_1, m_2	m_2, m_3	m_3, m_4	$\ldots$	$m_{l-1}, m_1.$

Perceba que qualquer uma das duas escolhas possíveis das cores escolhidas da caixa C_1 determina unicamente quais miçangas devem ser escolhidas nas outras caixas do ciclo anterior para que as cores permaneçam distintas. Se ainda existirem caixas fora deste ciclo, podemos repetir o processo descrito anteriormente e agrupá-las em ciclos. Para cada um deles, existirão apenas duas maneiras de selecionarmos suas miçangas de modo que as cores sejam todas distintas. Como as escolhas nesses ciclos são independentes, se k é o número deles, o total de escolhas de miçangas de cores diferentes é 2^k.

38.

a) O mínimo é 25. Se em um grupo de 24 pessoas cada signo aparecer no máximo duas vezes, teremos no máximo $2 \cdot 12 = 24$ pessoas. Como $24 < 25$, isso mostra que pelo menos um dos signos deverá aparecer três vezes. De fato, esse é o mínimo onde tal propriedade ocorre pois se considerarmos 24 pessoas divididas em 12 pares com o mesmo signo, a propriedade do enunciado não será encontrada.

b) O número mínimo é $12 \cdot 12 + 1 = 145$. Veja que existem no máximo $12 \cdot 12 = 144$ pares de combinações possíveis entre signos Gregos e Chineses. Se escolhermos 145 pessoas e as dividirmos de acordo com esses pares, pelo menos um deles deverá ser usado duas vezes. Não é possível concluirmos isso com menos de 145, pois é possível 144 pessoas apresentarem todos os pares possíveis de combinações sem repetições.

39. (Extraído do Mathcounts 2013) Existem 2^7 preenchimentos das 7 seções com duas cores. Cada uma desses preenchimentos pode ser rotacionado de 6 formas e gerar outros 6 preenchimentos equivalentes. Esses preenchimentos obtidos por rotação serão distintos se nem todas as cores escolhidas forem a mesma. Só existem duas pinturas em que todas as seções possuem a mesma cor. Portanto, o total de pinturas não equivalentes é

$$\frac{2^7 - 2}{7} + 2.$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com