Problemas dos Círculos Matemáticos

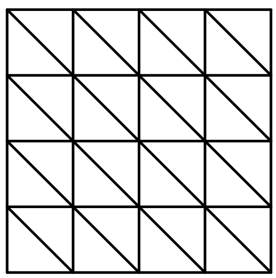
Problemas extras para o Capítulo 4

Portal da Matemática
OBMEP

Problemas dos Círculos Matemáticos - Capítulo 4

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Quantos triângulos existem na figura abaixo?

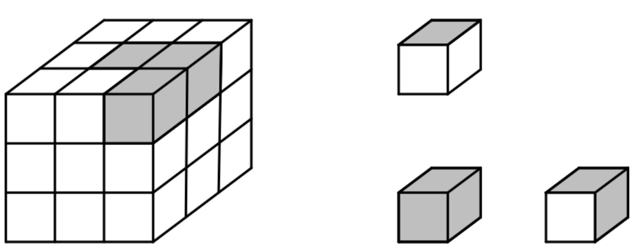


Exercício 2. Um número natural é bacana quando cada um de seus algarismos é maior que qualquer um dos outros algarismos que estão à sua esquerda. Por exemplo, 3479 é bacana, enquanto que 2231 não é. Quantos números bacanas existem entre 3000 e 8000?

Exercício 3. a) Na figura abaixo, João pintou algumas faces de cubinhos de um cubo $3 \times 3 \times 3$ de cinza. Ao desmontar o cubo em cubos menores de tamanho $1 \times 1 \times 1$, ele percebeu que um deles possuía três, outro possuía duas e o terceiro possuía apenas uma face cinza. Se ele tivesse pintado todas as faces do cubo maior de cinza, quantos cubinhos $1 \times 1 \times 1$ teriam exatamente uma face cinza? Quantos cubinhos teriam exatamente duas faces cinzas?

b) Se ele tivesse pintado todas as faces de um cubo $5 \times 5 \times 5$ de cinza, após dividi-lo em cubinhos $1 \times 1 \times 1$, quantos deles teriam exatamente uma face pintada de cinza?

c) Ainda considerando o cubo $5 \times 5 \times 5$, quantos cubinhos $1 \times 1 \times 1$ não teriam faces pintadas?



Exercício 4. Um jogo comum de dominó é composto por 28 peças. Cada peça é formada por dois números inteiros que variam de 0 a 6, inclusive. Todas as possibilidades de combinações possíveis (a, b), com $a \leq b$, são listadas exatamente uma vez. Note que a peça $(4, 2)$ é listada como a peça $(2, 4)$, pois $2 \leq 4$. Excluindo a peça $(0, 0)$, para cada uma das outras 27 peças (a, b), com $a \leq b$, escrevemos num quadro a fração $\frac{a}{b}$.

a) Quantos valores distintos estão escritos nas formas de frações no quadro? (Veja que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ têm o mesmo valor e devem ser contadas apenas uma vez.)

b) Qual a soma dos valores distintos encontrados no item anterior?

Exercício 5. Determine o valor da soma

$$11 + 13 + 15 + \ldots + 101.$$

Exercício 6. Quantos algarismos escrevemos ao numerarmos as páginas de um livro desde o número 23 até o número 56?

Exercício 7. Quantos algarismos escrevemos ao numerarmos as páginas de um livro desde o número 40 até o número 1200?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Um certo lago possui 5 espécies distintas de peixes. Determine o número mínimo de peixes que devemos pescar para garantirmos que pelo menos 3 deles serão da mesma espécie.

Exercício 9. Determine o número de termos menores que 1000 da seguinte sequência: $11, 14, 17, 20, \ldots$.

Exercício 10. Quantos são os anagramas que se pode formar com as letras da palavra BATATA nos quais

a) as vogais estejam sempre juntas?

b) vogais e consoantes estejam intercaladas?

c) a letra B esteja sempre entre as letras T? (não necessariamente consecutivas)

Exercício 11. Quinze pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas na fila?

Exercício 12. Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais não aparecem todas juntas?

Exercício 13. Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Existem apenas 6 letras no alfabeto de ABCDEFlândia. Uma palavra é qualquer sequência de seis letras em que pelo menos duas delas são iguais. Quantas palavras tem o alfabeto de ABCDEFlândia?

Exercício 15. O número 3 pode ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos de 4 maneiras diferentes:

$$3, \quad 1+2, \quad 2+1, \quad 1+1+1.$$

Mostre que todo inteiro n pode ser expresso de exatamente 2^{n-1} maneiras diferentes como soma de inteiros positivos.

Exercício 16. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Exercício 17. Um quadrado Latino é um tabuleiro $n \times n$ preenchido com n símbolos distintos de modo que em cada linha e em cada coluna não existam símbolos repetidos. Sabemos que existem 576 Quadrados Latinos distintos de dimensões 4×4. De quantos modos podemos completar o quadrado abaixo, que já possui duas casas preenchidas, com os algarismos $1, 2, 3$ e 4 de modo que em cada linha e coluna figurem os quatro algarismos?

1		2	

Exercício 18. João trabalha vendendo pacotes de previsão astrológica. Para incrementar as vendas de suas previsões, ele oferece descontos caso pessoas de um mesmo signo queiram contratar seus serviços. No Horóscopo Grego, como existem exatamente 12 signos, portanto, em um grupo de 13 pessoas, sempre duas delas terão o mesmo signo e poderão se interessar pelo pacote promocional.

a) Qual o número mínimo de pessoas que um grupo deve possuir para ele ter certeza de que existirão pelo menos 3 pessoas de um mesmo signo do Horóscopo Grego?

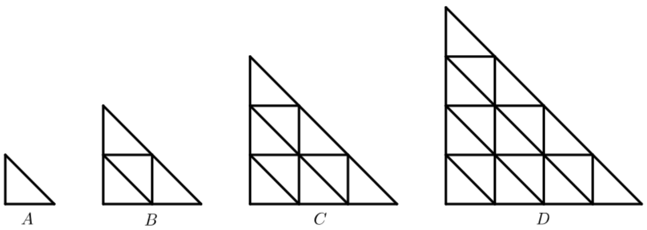
b) No Horóscopo Chinês, também existem exatamente 12 signos. Se João quiser ter certeza de que, em determinado grupo de pessoas existirão duas possuindo exatamente os mesmos signos, tanto no Horóscopo Grego quanto no Horóscopo Chinês, qual o número mínimo de pessoas que tal grupo deve ter?

Exercício 19. a) Mostre uma maneira de separar todos os números de 1 a 16 em quatro conjuntos com quatro números cada, de modo que cada conjunto tenha mesma soma.

b) Mostre que existem pelo menos 1024 maneiras de escrever os números de 1 até 16 em cada uma das casinhas de um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números de cada linha seja igual.

Respostas e Soluções.

1. Como todos os segmentos traçados são paralelos aos lados do quadrado ou à diagonal, os triângulos formados também possuem essas caracterísitcas. Assim, existem apenas quatro tipos de triângulos:



Os quatro tipos de triângulos foram definidos de acordo com a quantidade de triangulos menores: 1 na figura A, 4 na figura B, 9 na figura C e 16 na figura D. Na contagem, também devemos considerar suas cópias "viradas de cabeça para baixo". Como existem 32 triângulos do tipo A, 18 do tipo B, 8 do tipo C e 2 do tipo D, o total de triângulos é $32 + 18 + 8 + 2 = 60$.

2. Um número nesse intervalo deve possuir como primeiro dígito um dos seguintes números: 3, 4, 5 e 6. Não pode existir um número bacana começado em 7 porque não existem três algarismos distintos maiores que 7. Podemos assim dividir nossa busca pelos números bacanas:

(a) números começados em 3: 3456, 3457, 3458, 3459, 3467, 3468, 3469, 3478, 3479, 3489, 3567, 3568, 3569, 3578, 3579, 3589, 3678, 3679, 3689 e 3789;

(b) números começados em 4: 4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689 e 4789;

(c) números começados em 5: 5678, 5679, 5689 e 5789;

(d) números começados em 6: 6789.

Portanto, existem $20 + 10 + 4 + 1 = 35$ números bacanas.

3.

a) Como apenas os cubos pintados nos centros das 6 faces possuiriam exatamente uma face cinza, a resposta da primeira pergunta é 6. Os cubinhos com duas faces cinzas são aqueles que estão em duas faces do cubo maior mas que não são cantos. Existem 12 desses cubinhos.

b) Em cada face, o quadrado central 3×3 conteria os cubinhos com apenas uma face pintada de cinza. Como temos 6 faces, o total é $9 \cdot 6 = 54$.

c) No centro do cubo $5 \times 5 \times 5$ existe um cubo $3 \times 3 \times 3$ em que nenhuma das faces de seus cubinho está visível. Como apenas os cubinhos visíveis receberam pelo menos uma face cinza na pintura, o total de cubos não pintados é $3 \times 3 \times 3 = 27$.

4.

a) Basta começar contando pelos maiores denominadores e não repetir quando aparecerem os menores.

i) Para $b = 6$, temos

$$\left(\frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}\right) = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right)$$

ii) Para $b = 5$, não devemos repetir 0 e nem 1 pois já foram contados, temos

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

iii) Para $b = 4$, só podemos adicionar frações irredutíveis de denominador 4, pois já contamos as de denominador 1 e 2 quando $b = 6$, temos então

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

iv) Quando b for 1, 2 ou 3, teremos frações que já foram contadas no caso $b = 6$.

Logo, o número de valores distintos é $7 + 4 + 2 = 13$.

b) Um bom jeito de somarmos as 13 frações é considerarmos suas formas redutíveis vistas no item anterior, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{0}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} &= \frac{21}{6} \\
&= \frac{7}{2}; \\
\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} &= \frac{10}{5} \\
&= 2; \\
\frac{1}{4} + \frac{3}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Então a soma total é $\frac{7}{2} + 2 + 1 = \frac{13}{2}$.

5. Temos:

$$\begin{aligned}
11 + 13 + 15 + \ldots + 101 &= \\
(11) + (11 + 2) + (11 + 4) + \ldots + (11 + 90) &= \\
2 \times (1 + 2 + \ldots + 45) + 11 \times 46 &= \\
2 \times \frac{45(45 + 1)}{2} + 506 &= \\
&= 2576
\end{aligned}$$

6. Como existem $56 - 23 + 1 = 34$ números de dois dígitos sendo usados na paginação a quantidade de algarismos é $2 \times 34 = 68$.

7. Na paginação são usados $99 - 40 + 1 = 60$ números de dois algarismos $999 - 100 + 1 = 900$ números de três algarismos e $1200 - 1000 + 1 = 201$ números de quatro algarismos. Assim o total de algrismos usados é $2 \times 60 + 3 \times 900 + 4 \times 961 = 3624$.

8. É possível pescarmos 2 peixes de cada espécie ou seja 10 peixes e não conseguirmos cumprir o objetivo. Entretanto pescando 11 pelo menos 3 serão da mesma espécie pois caso contrário teríamos no máximo 10 peixes. Portanto o mínimo é 11.

9. Como o incremento é sempre de 3 unidades todos os números listados possuem o mesmo resto na divisão por 3. Assim como 11 deixa resto 2 na divisão por 3 o maior termo da sequência menor que 1000 é $998 = 3 \times 332 + 2$. Portanto o número de termos é 330

10.

a) Se deve haver um bloco formado por três A's, temos então $P_4^2 = 12$ anagramas.

b) Podemos iniciar com vogal (VCVCVC) ou consoante (CVCVCV). Basta permutar, em ambos, apenas as consoantes, ou seja, $P_3^2 = 3$. Temos então $2 \cdot 3 = 6$ anagramas.

c) $\dfrac{P_6^{2,3}}{3} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 3} = 20.$

11. Se são quinze pessoas, teremos quinze lugares na fila. Como existe uma sequência fixa de posicionamente entre os homens, ou seja, primeiro deve estar o menor, depois o segundo menor e assim por diante, precisamos apenas escolher as cinco posições, dentre as quinze, para os homens. O mesmo acontece para as mulheres. Sendo assim, resolver esse problema é o mesmo que contar a quantidade de anagramas de uma palavra com cinco letras iguais e outras dez letras iguais (permutação com repetição). Temos então $P_{15}^{10,5} = \dfrac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003$.

12. Basta subtrair, do total, a quantidade de anagramas nos quais as vogais aparecem todas juntas, ou seja, $P_6 - P_3 \cdot P_4 = 6! - 3!4! = 576$ anagramas.

13. O total de números nos quais 3 e 4 ocupam posições adjacentes é $2P_5 = 2 \cdot 5! = 240$. Basta agora subtrair os números em que 1 e 2 ocupam posições adjacentes, que são $2 \cdot 2 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 96$. Assim temos $240 - 96 = 144$ números.

14. Se não considerarmos a restrição das duas letras iguais, pelo Princípio Multiplicativo existem 6^6 palavras com seis letras. Destas, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possuem todas as letras distintas. Portanto, existem $6^6 - 120$ palavras de seis letras com pelo menos duas letras iguais.

15. Considere uma sequência de n números 1's com espaços entre eles como indicado na figura abaixo:

$$(1\_\_1\_\_1\_\_ \ldots \_\_1\_\_1\_\_).$$

Cada um desses $n - 1$ espaços será preenchido com ")+(" ou "+". Um preenchimento corresponde a uma escrita ordenada de n como soma de inteiros positivos. Por exemplo, se $n = 4$, o preenchimento de $(\_\_1\_\_1\_\_1\_\_1\_\_)$ da forma

$$(1 + 1) + (1) + (1)$$

significa a soma ordenada $2 + 1 + 1$. Existem 2^{n-1} preenchimentos e, consequentemente, 2^{n-1} somas ordenadas em inteiros positivos.

16. Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Facilmente obtemos $7 \times 9 = 63$ estradas. Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada exatamente duas vezes. Logo, o número obtido tem que ser par e isso claramente entra em contradição com o valor 63 obtido na primeira contagem.

17. Observe que dado um Quadrado Latino, quando trocamos todas as casas de um símbolo pelas casas de outro, ainda obtemos outro Quadrado Latino. No exemplo dado no enunciado, ao trocarmos as casas de número 1 e 2 de posição, obtemos:

2	1	3
3	2	1
1	3	2

Isso nos permite construir uma correspondência biunívoca entre todos os Quadrados Latinos que possuem no canto superior esquerdo um símbolo em $\{1, 2, 3, 4\}$ e todos os outros Quadrados Latinos com outro símbolo no mesmo conjunto. Daí, em $1/4$ do total de Quadrados Latinos 4×4 deve possuir o algarismo 1 na casa do canto superior esquerdo. Dentre esses quadrados, qualquer permutação entre os símbolos de $\{2, 3, 4\}$ ainda irá gerar um quadrado onde a casa do canto superior esquerdo tem o símbolo 1.

1	X	Y	Z

Portanto, em um terço dessas configurações o algarismo 2 se encontra na posição X, em outro terço na posição Y e no último terço na posição Z dos quadrados da primeira linha da figura anterior. Logo, o total de Quadrados Latinos procurados é

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 576 = 48.$$

18.

a) O mínimo é 25. Se em um grupo de 24 pessoas cada signo aparecer no máximo duas vezes, teremos no máximo $2 \cdot 12 = 24$ pessoas. Como $24 < 25$, isso mostra que pelo menos um dos signos deverá aparecer três vezes. De fato, esse é o mínimo onde tal propriedade ocorre pois se considerarmos 24 pessoas divididas em 12 pares com o mesmo signo, a propriedade do enunciado não será encontrada.

b) O número mínimo é $12 \cdot 12 + 1 = 145$. Veja que existem no máximo $12 \cdot 12 = 144$ pares de combinações possíveis entre signos Gregos e Chineses. Se escolhermos 145 pessoas e as dividirmos de acordo com esses pares, pelo menos um deles deverá ser usado duas vezes. Não é possível concluirmos isso com menos que 145 pois é possível 144 pessoas apresentarem todos os pares possíveis de combinações sem repetições.

19.

a) Primeiramente formemos oito pares de números escolhendo números opostos ao "meio" da sequência, ou seja, $(1,16)$, $(2,15)$, $\ldots$, $(7,10)$ e $(8,9)$. Veja que cada par possui soma 17. Agora junte os pares em quatro grupos, cada um com soma 34, por exemplo: $(1,16,2,15)$, $(3,14,4,13)$, $(5,12,6,11)$ e $(7,10,8,9)$.

b) Veja que os números obtidos no item anterior fornecem um exemplo de como colocar os números em cada linha. Vamos mostrar que temos pelo menos 1024 variações distintas desse exemplo. Em cada linha podemos "girar"os números quatro vezes para a esquerda obtendo as sequências: $(1,16,2,15)$, $(16,2,15,1)$, $(2,15,1,16)$ e $(15,1,16,2)$. Além disso, podemos "girar" as linhas quatro vezes de cima para baixo. Então, apenas rodando o "exemplo" contruído, temos pelo menos 4 variações dentro de cada linha e mais outras 4 para rotações entre as linhas. Assim, no total teremos

$$\underbrace{(4 \times 4 \times 4 \times 4)}_{\textit{giros dentro das linhas}} \times \underbrace{4}_{\textit{giros entre as linhas}} = 1024$$

maneiras de realizar esta tarefa. A figura abaixo mostra alguns exemplos de tabuleiros que podem ser obtidos pelas operações de rotações descritas:

1	16	2	15
3	14	4	13
5	12	6	11
7	10	8	9

16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5
10	8	9	7

10	8	9	7
16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com