Módulo de Geometria Analítica 1

Equação da Reta.

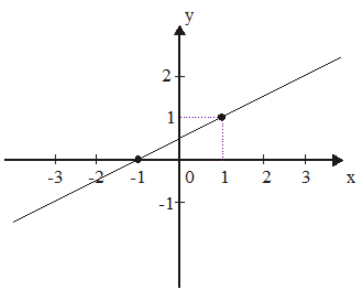
3^a série E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

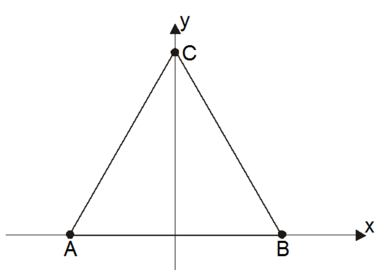
Geometria Analítica 1
Equação da Reta.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a equação da reta cujo gráfico está representado no plano cartesiano abaixo.

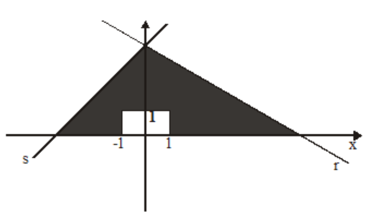


Exercício 2. Na figura abaixo, tem-se um triângulo equilátero de lado 6 e cujos vértices A, B, C situam-se sobre os eixos cartesianos.



Qual a equação da reta que dá suporte ao lado BC?

Exercício 3. Sejam r e s as retas cujas equações são, respectivamente, $y = -x + 3$ e $y = \dfrac{3x}{2} + 3$. Qual a área sombreada na figura abaixo, em unidade de área?

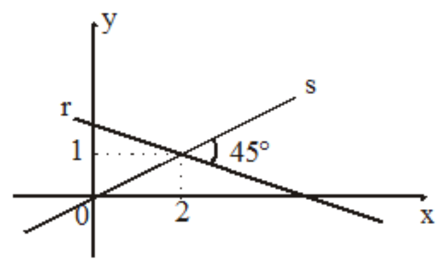


Exercício 4. O ponto "P" pertence à bissetriz dos quadrantes pares e tem como abscissa um número inteiro. A área do triângulo formado por $A(-4;-3)$, $B(-1;3)$ e P mede 15 u.a. A reta que passa pelos pontos A e B intercepta o eixo das ordenadas em Q. Com base nesses dados, qual a distância entre P e Q?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. No plano cartesiano, o triângulo de vértices $A(1,2)$, $B(m,4)$ e $C(0,6)$ é retângulo em A. Qual o valor de m?

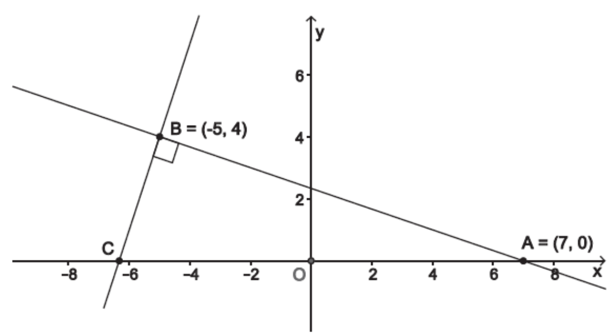
Exercício 6. Analisando a figura abaixo, qual o coeficiente angular da reta r ?



Exercício 7. Uma reta r_1 tem inclinação de 135° e passa pelo ponto $P(3,5)$. Determine a equação da reta r_2 que é perpendicular à reta r_1 e passa pelo ponto $Q(5,3)$.

Exercício 8. Determine o menor ângulo formado entre as retas $r : y = 3x + 4$ e $s : y = -2x + 8$.

Exercício 9. No sistema de coordenadas cartesianas xOy, descrito na figura a seguir, estão representadas as cidades A, B, C e O e as estradas, supostas retilíneas, que ligam estas cidades, sendo a unidade de medida dos eixos de 10 Km.



Usando as informações contidas nesse mapa, determine a distância, em Km, entre as cidades C e O.

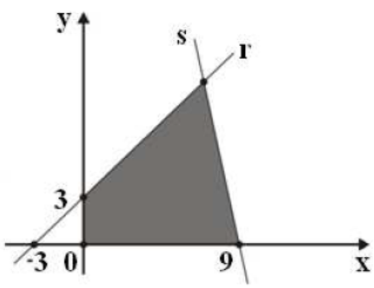
Exercício 10. No plano cartesiano, a reta (r) de equação $y + kx = 2$ é perpendicular à reta (s) que passa pela origem e pelo ponto $(-5,1)$. Qual a abscissa do ponto de intersecção das retas (r) e (s)?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

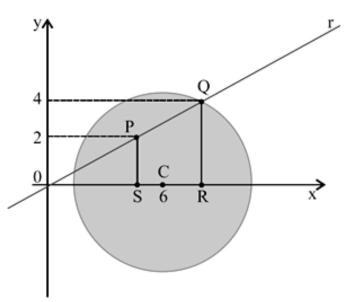
Exercício 11. No plano cartesiano, a reta r, de coeficiente angular 10, intercepta o eixo y em um ponto de ordenada b_1. Já a reta s, de coeficiente angular 9, intercepta o eixo y

em um ponto de ordenada b_2. Se as retas r e s interceptam-se em um ponto de abscissa 6, expresse b_2 em função de b_1.

Exercício 12. A figura a seguir ilustra as representações cartesianas das retas r e s de equações $y = x + 3$ e $y = -3x + 27$, respectivamente, com x e y dados em metros. Determine a área, em metros quadrados, do quadrilátero destacado.

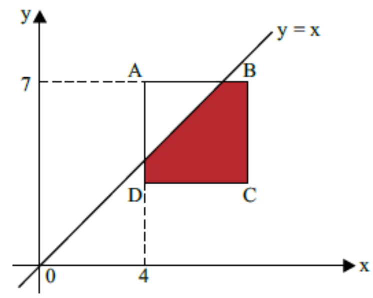


Exercício 13. Uma circunferência de centro $C(6, 0)$ e raio 5, é interceptada por uma reta r no ponto Q de ordenada 4, conforme mostra a figura



Sabendo que a reta r passa pela origem do sistema cartesiano e pelo ponto P de ordenada 2, qual a abscissa do ponto P?

Exercício 14. Um quadrado $ABCD$ tem seus lados paralelos aos eixos ortogonais do plano cartesiano e seu vértice A tem coordenadas $(4, 7)$. O quadrado é intersectado pela bissetriz dos quadrantes ímpares, conforme indica a figura a sequir, formando o polígono hachurado de área $\frac{23}{2}$.



Qual a medida do lado do quadrado $ABCD$, em unidades lineares?

Respostas e Soluções.

1. (Extraído do vestibular da UFPB)
A reta tem coeficiente angular $a = \dfrac{1-0}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$. Além disso, podemos calcular o coeficiente linear fazendo $a = \dfrac{1-b}{1-0}$, ou seja, $b = \dfrac{1}{2}$. A reta terá equação $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$ ou, escrevendo-a de outra forma, $x - 2y + 1 = 0$.

2. (Extraído do vestibular da UNIFOR (CE))
A altura de um triângulo equilátero é $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, onde ℓ é a medida do seu lado. Sendo assim, temos que $B = (3,0)$ e $C = \left(0, 3\sqrt{3}\right)$. Portanto, o a reta tem coeficiente angular $a = \dfrac{0-3\sqrt{3}}{3-0} = -\sqrt{3}$. O coeficiente linear pode ser obtido pela interseção da reta com o eixo y, ou seja, $b = 3\sqrt{3}$. Assim equação da reta é $BC : y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ ou $BC : \sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$.

3. (Adaptado do vestibular da UFJF (MG))
A reta r intersecta o eixo x no ponto $(3,0)$, a reta s intersecta o eixo x no ponto $(-2,0)$ e ambas intersectam y no ponto $(0,3)$. Então o triângulo da figura tem base medindo 5, altura 3 e área $\dfrac{3\cdot 5}{2} = 7,5$. Agora, para calcular a área da parte sombreada, basta subtrairmos a área do retângulo branco, que vale $2 \times 1 = 2$. Portanto, a área procurada é $7,5 - 2 = 5,5$ u.a..

4. (Adaptado do vestibular da IFPR)
O ponto P tem como coordenadas $(-x, x)$, pois pertence à segunda bissetriz, e a área do triângulo mencionado é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -x & x & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

$$\frac{1}{2} \cdot |(3x - 12 - x) - (3 - 3x - 4x)| = 15$$

$$|9x - 15| = 30$$

Podemos ter $9x - 15 = 30$, resultando em $x = 5$, ou podemos ter $9x - 15 = -30$, resultando em $x = -5/3$. Como x é inteiro, $P = (-5, 5)$. Agora, dado que A, B e Q estão alinhados,

$$\begin{aligned} \frac{y_Q - (-3)}{0 - (-4)} &= \frac{3 - (-3)}{-1 - (-4)} \\ \frac{y_Q + 3}{4} &= 2 \\ y_Q + 3 &= 8 \\ y_Q &= 5 \end{aligned}$$

Assim $Q = (0, 5)$. A medida PQ será igual a

$$\sqrt{(0 - (-5))^2 + (5-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

5. (Adaptado do vestibular da FGV)
Num triângulo retângulo, as retas que dão suporte aos catetos são perpendiculares e seus coeficientes angulares possuem produto -1. Logo, $a_{AB} = \dfrac{4-2}{m-1}$ e $a_{AC} = \dfrac{6-2}{0-1} = -4$. Daí, temos

$$\begin{aligned} \frac{4-2}{m-1} &= \frac{1}{4} \\ 8 &= m - 1 \\ m &= 9. \end{aligned}$$

6. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE))
Se $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ representam os coeficientes angulares de r e s, respectivamente, temos $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1-0}{2-0} = \dfrac{1}{2}$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 135^\circ &= \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \\ -1 &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1/2}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{2}} \\ -1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{2} &= \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} \\ 3\operatorname{tg}\alpha &= -1 \\ \operatorname{tg}\alpha &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

7. (Extraído do vestibular da EFEI (MG))
O valor de a_{r_1} é igual a $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, então uma perpendicular a ela tem coeficiente angular igual a $a_{r_2} = 1$. Para passar pelo ponto $(5,3)$, devemos ter $3 = 1 \cdot 5 + b$, logo $b_{r_2} = -2$ e a equação é $r_2 : y = x - 2$.

8. Sendo θ o ângulo pedido, α e β os ângulos das inclinações das retas dadas com o eixo x, temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha}.$$

As retas têm coeficientes angulares iguais a 3 e -2, logo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{3 - (-2)}{1 + 3\cdot(-2)} \\ &= \frac{5}{-5} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Logo, $\theta = 135^\circ$, mas como foi pedido o menor ângulo, tomamos o complementar e obtemos com 45°.

9. (Extraído do vestibular da UFU (MG) $-$ 2014)
As retas perpendiculares AB e BC têm $a_{AB} = \dfrac{4}{-12} = -\dfrac{1}{3}$ e $a_{BC} = 3$. O ponto $(-5,4)$ pertence a BC, logo, se b é o coeficiente linear de tal reta, temos $4 = 3 \cdot (-5) + b$, produzindo $b = 19$ e $C = \left(-\dfrac{19}{3}, 0\right)$. Por fim, teremos que $\overline{CO} = \dfrac{19}{3} \cdot 10 = \dfrac{190}{3} km$.

10. (Adaptado do vestibular da FGV $-$ 2014)
Como a reta (s) passa pela origem e pelo ponto $(–5,1)$, seu coeficiente angular vale 5. Como a reta (r) é perpendicular à reta s, seu coeficiente angular é $-\dfrac{1}{5}$. Portanto, dado que $r : y = -kx + 2$, temos $k = -5$. Agora, tendo obtido $r : y = 5x + 2$ e $s : y = -\dfrac{x}{5}$, podemos encontrar a interseção das duas resolvendo a equação

$$5x + 2 = -\frac{x}{5},$$

produzindo assim o ponto $\left(-\dfrac{5}{13}, \dfrac{1}{13}\right)$, cuja abscissa é $-\dfrac{5}{13}$.

11. (Adaptado do vestibular da IBMEC (SP) $-$ 2014)
Temos $r : y = 10x + b_1$ e $s : y = 9x + b_2$. Como elas têm um ponto comum quando $x = 6$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 54 + b_2 &= 60 + b_1 \\ b_2 &= b_1 + 6. \end{aligned}$$

12. (Adaptado do vestibular da IFPE (PE) $-$ 2014)
A área cinza pode ser calcula pela subtração do triângulo maior com vértices nos pontos de interseção das retas com o eixo x e entre si e do triângulo menor de área $\dfrac{3 \cdot 3}{2} = 4,5m^2$. O ponto de concorrência das retas será obtido como solução do sistema

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -3x + 27, \end{cases}$$

cuja solução é $(6,9)$. Por fim, a área do triângulo grande é igual a $\dfrac{12 \cdot 9}{2} = 54m^2$ e a área cinza é $54 - 4,5 = 49,5m^2$.

13. (Adaptado do vestibular da Univag (MT) $-$ 2014)
Como CRQ éum triângulo retângulo em R, com hipotenusa $\overline{CO} = 5$ e cateto $\overline{RQ} = 4$, o outro cateto mede $\overline{CR} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Portanto, $R = (9,0)$, $Q = (9,4)$ e a reta PQ tem coeficiente angular $a_{PQ} = \dfrac{4}{9}$. Assim a reta suporte de PQ possui equação $y = \dfrac{4x}{9}$. Daí, obtemos $2 = \dfrac{4x_S}{9}$ e $x_S = 4,5$.

14. (Adaptado do vestibular da São Camilo (SP) $-$ 2014)
Chamemos de E e F os pontos de encontro da reta $y = x$ com os lados AD e AB, respectivamente. Concluímos então que $E = (4,4)$ e $F = (7,7)$. Logo, a área de ADF é igual a $\dfrac{3 \cdot 3}{2} = 4,5$. Por fim, a área do quadrado é igual a soma da parte colorida com S_{ADF}, o que é 16, e o lado mede, portanto, 4.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com