Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

O que é Lógica Matemática?

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

12 de fevereiro de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

O mundo moderno está repleto de tecnologias e produtos que melhoram nossa qualidade de vida, como computadores, remédios, carros, Internet e outros.

Em boa medida, o dramático avanço da Ciência foi o grande responsável por tais desenvolvimentos. Grosso modo, o avançar da Ciência funciona mais ou menos assim: em um determinado momento, existe um conjunto de conhecimentos que já são verificados como verdadeiros. Por exemplo: "*a fórmula química da água é* H_2O." ou "*O número* $\sqrt{2}$ *é irracional*." Então um cientista (ou um grupo destes) consegue inferir a veracidade de novos conhecimentos através de uma argumentação que pode ser indutiva ou dedutiva.

Para que essa *máquina de produzir conhecimentos* possa ser utilizada de forma adequada, faz-se necessário utilizar um sistema formal de regras de inferência, pela utilização do qual os cientistas possam validar ou invalidar argumentos, de modo a evitar a consideração de conhecimentos falsos como verdadeiros.

O leitor com alguma familiaridade com laboratórios e experimentos pode estar pensando que estamos nos referindo ao *Método Científico*. De fato, este é imprescindível à Ciência, mas estamos falando de algo mais básico, algo que norteia a aplicação do Método Científico, a *Lógica Matemática*.

2 Lógica

Uma Lógica (ou *sistema lógico*) é qualquer sistema formal que estude o processo de argumentação. A título de curiosidade, saiba que existem diversos tipos de sistemas lógicos. Porém, neste módulo, desenvolveremos apenas a chamada *Lógica Clássica* ou *Lógica Bivalente*.

Historicamente, atribui-se ao filósofo grego **Aristóteles** (384 a.C. - 322 a.C.) os primeiros tratados sobre Lógica. Seu trabalho foi tão profundo que Kant[1] certa vez assegurou que nada de significante foi adicionado a lógica de Aristóteles durante dois milênios. Exageros à parte, veremos mais adiante que muitas das nomenclaturas atuais ainda são as mesmas desenvolvidas por este eminente filósofo grego.

3 Lógica de forma intuitiva

Antes de avançarmos para o formalismo, apresentaremos uma série de problemas que podem ser resolvidos sem nenhum conhecimento prévio de Matemática, utilizando apenas noções intuitivas de *raciocínio lógico*.

Resolver enigmas lógicos é uma forma interessante e motivadora de praticar o raciocínio lógico. Nesta seção, você encontrará alguns dos famosos enigmas do livro de Raymond Smullyan [2]. Recomendamos que você sempre tente resolver os exercícios antes de olhar as respectivas soluções.

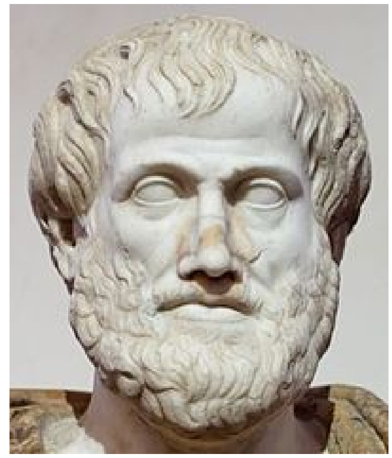

Figura 1: Busto de Aristóteles.

Exemplo 1. *Na ilha de Anchúria, há três tipos de pessoas: os heróis que sempre falam a verdade, os ladrões que sempre mentem e as pessoas comuns que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Certa vez, um viajante chegou à ilha e encontrou-se com três moradores: Arnaldo (A), Bernaldo (B) e Cernaldo (C), tendo escutado deles as seguintes frases:*

A: *Eu sou uma pessoa comum.*
B: *Arnaldo diz a verdade.*
C: *Eu não sou uma pessoa comum.*

Sabendo que dentre essas pessoas há uma de cada tipo, quem é o herói e quem é o ladrão?

Solução. Se Arnaldo estiver falando a verdade, então Bernaldo também está e nenhum deles pode ser o ladrão. Neste caso, o ladrão seria Cernaldo que, dizendo não ser uma pessoa comum, estaria também falando a verdade, o que é uma contradição. Consequentemente, Arnaldo deve estar mentindo. Assim, Bernaldo também está mentindo e Cernaldo tem que ser o herói, o que é compatível com sua afirmação. Neste caso, como Arnaldo está mentindo, ele não é uma pessoa comum e nem herói. Logo, deve ser ladrão. Em resumo, Cernaldo é o herói, Arnaldo é o ladrão e Bernaldo é uma pessoa comum. □

Exemplo 2. *Considere as mesmas hipóteses do exemplo anterior, porém, com o seguinte diálogo:*

A: *Cernaldo é um ladrão.*
B: *Arnaldo é um herói.*
C: *Eu sou uma pessoa comum.*

[1] Immanuel Kant, filósofo alemão do século XVIII, um dos mais importantes da História.

Sabendo que há uma pessoa de cada tipo, quem é o herói e quem é o ladrão?

Solução. Veja que Cernaldo não pode ser o herói, pois um herói nunca falaria que é uma pessoa comum. Temos, então, de analisar dois casos:

- Se Cernaldo for uma pessoa comum, então Arnaldo estará mentindo e será o ladrão. Porém, Bernaldo também estará mentindo, e isto impede que ele seja um herói. Contradição!

- Se Cernaldo for um ladrão: já sabemos que este é o caso verdadeiro, pois já concluímos que o caso anterior gera uma contradição. Agora, supondo que Arnaldo seja uma pessoa comum, por exclusão Bernaldo deve ser o herói e Bernaldo estará mentindo. Mas isso é uma nova contradição!

Portanto, concluímos que Arnaldo é o herói, Bernaldo é a pessoa comum e Ceraldo é o ladrão. □

Exemplo 3. *Desta vez, o viajante encontrou-se com quatro pessoas, que por simplicidade denotaremos P, Q, R, S, e nenhuma delas é uma pessoa comum. As frases por elas proferidas foram as seguintes:*

P: *R e Q são ambos heróis ou ambos ladrões.*
Q: *S é um ladrão.*
R: *P é um ladrão.*
Z: *R é um herói e Q é um ladrão.*

Quem são heróis e quem são os ladrões?

Solução. Vamos começar supondo que S falou a verdade. Sob esta hipótese, R fala a verdade, portanto P é ladrão. Como consequência, R e Q são de tipos diferentes. Por outro lado, de acordo com S, Q é um ladrão. Logo, R é um herói. Como estas classificações concordam com as afirmações feitas por cada um, são conclusões verdadeiras. □

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 4. *João mente nas terças, quintas e sábados e no resto dos dias fala a verdade. Um dia, Pedro encontra João:*

P: *Que dia é hoje?*
J: *Sábado.*
P: *Que dia será amanhã?*
J: *Quarta-feira.*

Que dia da semana Pedro encontrou João?

Solução. Observe que João mentiu, pois o dia depois de sábado nunca será quarta. Isso significa que os amigos se encontram na terça, na quinta ou no sábado. Caso eles tivessem se encontrado na terça, João estaria falando a verdade na segunda resposta. Caso eles tivessem se encontrado o sábado, João estaria falando a verdade na primeira resposta. Portanto, eles se encontram na quinta. □

Exemplo 5 (OBM). *Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: "Amanhã é dia de mentir". Que dia foi este?*

Solução. Os únicos dias em que Pedro pode falar essa frase são terça ou sexta. Para Maria, os únicos dias em que é possível falar tal frase são sábado ou terça. Portanto, o dia mencionado na questão deve ter sido uma terça-feira. □

Exemplo 6 (OCM). *No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:*

– ***Marcondes:*** *escolhi dois inteiros positivos e consecutivos e darei um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior.*

Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversação.

– ***Francisco:*** *não sei o número que Fernando recebeu;*
– ***Fernando:*** *não sei o número que Francisco recebeu;*
– ***Francisco:*** *não sei o número que Fernando recebeu;*
– ***Fernando:*** *não sei o número que Francisco recebeu;*
– ***Francisco:*** *não sei o número que Fernando recebeu;*
– ***Fernando:*** *não sei o número que Francisco recebeu;*
– ***Francisco:*** *agora eu sei o número que o Fernando recebeu;*
– ***Fernando:*** *agora eu também sei o número que Francisco recebeu.*

Quais os números recebidos por cada um deles?

Solução. Apesar de parecer um pouco confuso, este é um problema bem formulado e muito interessante. Seu segredo está em uma propriedade fundamental do conjunto dos números inteiros positivos: ele possui um menor elemento, o número 1, que não possui antecessor.

Primeiramente, veja que Francisco não recebeu o número 1, pois, se este fosse o caso, ele saberia imediatamente que Fernando havia recebido o número 2. Além disso, ao falar que não sabe o número de seu amigo, Fernando também deduz que Francisco não recebeu o número 1. Dessa forma, podemos concluir que Fernando não recebeu o número 2. Pois, se fosse este o caso, ele saberia que Francisco haveria recebido o número 3. Além disso, ao escutar a primeira afirmação de Fernando, Francisco também deduz que

Fernando não recebeu o número 2. Continuando este raciocínio de forma análoga, percebemos que:

- Francisco não recebeu o número 3;
- Fernando não recebeu o número 4;
- Francisco não recebeu o número 5;
- Fernando não recebeu o número 6;

Agora, veja que Francisco recebeu o número 7, pois é a única forma dele ter descoberto o número de Fernando com as deduções anteriores. De fato, ao receber o número 7, ele ficará na dúvida se Fernando recebeu o número 6 ou o número 8, e a dúvida é solucionada apenas quando ele percebe que Fernando não recebeu o número 6. Além disso, com a última afirmação de Francisco, Fernando também conclui que Francisco recebeu a carta 7 e, por isso, sua última afirmação é uma certeza sobre o número de Francisco. □

Exemplo 7. *Certo dia, um funcionário do Senso Demográfico bate na porta da casa de uma senhora e trava com ela o seguinte diálogo:*

– Quantos filhos a senhora tem?
– Tenho três filhos. E o produto das idades deles é 36*.*
– Com esta informação é impossível descobrir a idade de cada um deles, senhora.
– A soma das idades deles é igual ao número de janelas daquele prédio – diz a senhora, apontando para a construção em frente à sua casa.
– Bem, isso ajuda, mas ainda não tenho como saber as idades de seus filhos.
– O mais velho toca piano.
– Ah! Agora posso saber todas as idades!

Quantos anos tem cada um dos filhos?

Solução. Vamos listar todas as triplas ordenadas de inteiros positivos, em ordem não decrescente e tais que o produto dos três é igual a 36:

$$(1,1,36); \quad (1,2,18); \quad (1,3,12); \quad (1,4,9);$$

$$(1,6,6); \quad (2,2,9); \quad (2,3,6); \quad (3,3,4).$$

Como existem oito possibilidades, é realmente impossível descobrir a idade de cada um dos filhos. Agora, calculemos a soma dos elementos em cada uma dessas triplas:

$$1+1+36=38; \qquad 1+2+18=21;$$

$$1+3+12=16; \qquad 1+4+9=14;$$

$$1+6+6=13; \qquad 2+2+9=13;$$

$$2+3+6=11; \qquad 3+3+4=10.$$

Apesar de não sabermos qual é quantidade de janelas do prédio, o funcionário do Senso sabia (ele pôde contá-las). Mas, se ele não conseguiu deduzir as idades de cada um dos filhos com tal informação, isso significa que ela não é suficiente. A única possibilidade disto ter ocorrido é se a quantidade de janelas do prédio for 13. De fato, este é o único número para o qual existem duas triplas listadas com somas de elementos iguais. Desta forma, ficamos apenas com duas possibilidades:

$$(1,6,6) \quad e \quad (2,2,9).$$

Por outro lado, apenas a segunda possui um filho mais velho. Logo, as idades dos filhos da senhora eram 2, 2 e 9 anos. □

Exemplo 8. *Três amigas encontram-se em uma festa. O vestido de uma delas é azul, o de outra é preto, e o da terceira é branco. Elas calçam pares de sapatos destas mesmas três cores, mas somente Ana está com vestido e sapatos de mesma cor. Por outro lado, nem o vestido nem os sapatos de Júlia são brancos, ao passo que Marisa está com sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.*

Solução. Como os sapatos de Marisa eram azuis e nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos, conclui-se que os sapatos de Júlia eram pretos e, portanto, os sapatos de Ana eram brancos. O vestido de Ana era branco, pois ela era a única que usava vestido e sapatos da mesma cor; consequentemente, o vestido de Júlia era azul e o de Marisa era preto. □

Exemplo 9 (Olimp. Matem. de Goiás, 2018)**.** *Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ronaldo estão usando bonés que têm a parte de cima branca ou preta, mas tais que a parte de baixo é igual em todos eles. Dessa forma, cada um pode ver a cor dos bonés dos outros, mas não pode ver a cor de seu próprio boné. Diante disso, eles fazem os comentários a seguir:*

Arnaldo: *Eu vejo três bonés pretos e um branco.*
Bernaldo: *Eu vejo quatro bonés brancos.*
Cernaldo: *Eu vejo um boné preto e três brancos.*
Dernaldo: *Eu vejo quatro bonés pretos.*

Sabendo-se que quem estava usando boné preto falou a verdade e quem estava usando boné branco mentiu, qual é a cor do boné de cada um dos amigos?

Solução. Inicialmente, note que cada pessoa enxerga os bonés dos amigos mas não enxerga o próprio boné, logo, ele enxerga 4 dos 5 bonés.

Suponha que Arnaldo esteja falando a verdade, i.e., que ele esteja de boné preto. Desta forma, temos um conjunto com 4 bonés pretos (4 verdades) e 1 boné branco (1 mentira). Mas isto é uma contradição, pois Bernaldo e

Cernaldo deveriam ter mentido, já que disseram que existe mais que 1 boné branco. Portanto, Arnaldo está mentindo, logo está de boné branco.

Agora, suponha que Bernaldo esteja dizendo a verdade, de forma que ele está de boné preto e todos os outros de bonés brancos. Isto significa que cada colega vê 1 boné preto e 3 bonés brancos, logo, Cernaldo deveria estar dizendo a verdade, o que resulta em uma nova contradição. Portanto, Bernaldo também está mentindo, e está de boné branco.

Por sua vez, se Cernaldo está dizendo a verdade, então ele está de boné preto e, pela fala de Dernaldo, este deve estar de boné branco. Resta, pois, o boné preto para Ronaldo. Se, por outro lado, Cernaldo está mentindo, então ele está de boné branco, daí Dernaldo também está mentindo e deve estar de boné branco. Para decidir a cor do boné de Ronaldo, devemos analisar as falas dos colegas. Se Ronaldo está de boné branco, então teríamos 5 bonés brancos e isto implicaria que Bernaldo está dizendo a verdade, o que não é possível. Assim, Ronaldo está de boné preto, e isto significa que Arnaldo está dizendo a verdade, o que também não é possível. Portanto, esta opção não pode ocorrer. Segue que Cernaldo está dizendo a verdade.

Assim, concluímos que:

- Arnaldo mentiu. Portanto, Arnaldo está usando boné branco.
- Bernaldo mentiu. Portanto, Bernaldo está usando boné branco.
- Cernaldo disse a verdade. Logo, ele está usando boné preto.
- Dernaldo está de boné branco e Ronaldo está de boné preto.

□

4 Sugestões ao Professor

Recomenda-se que o professor utilize pelo menos dois encontros de 100 minutos cada para apresentar o conteúdo presente neste material. Dê tempo para que os alunos tentem resolver os desafios apresentados. Por exigirem pouco conhecimento prévio de Matemática, os exercícios de Lógica são atrativos para os mais diversos públicos.

Além de [2], outras fontes de exercícios sobre Lógica são o capítulo 0 do livro *Círculos Matemáticos* [1] e as questões do nível iniciante da Olimpíada Brasileira de Informática (OBI) que podem ser encontradas no site `https://olimpiada.ic.unicamp.br/`.

Referências

[1] Dmitri Fomin, Ilia Itenberg, and Sergey Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa.* IMPA, 2012.

[2] Raymond Smullyan. *A Beginner's Guide to Mathematical Logic.* Dover Publications, Inc., 2014.