Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

Expandindo o Vocabulário

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

12 de junho de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Sentenças abertas e quantificadores

Já vimos que um dos objetivos da Lógica é o estudo das proposições. Agora, consideremos as seguintes afirmações declarativas (proposições):

(i) Ele é um ótimo cozinheiro.

(ii) Ele e ela formam um lindo casal.

(iii) x é um número par.

Observe que, apesar das três declarações poderem ser consideradas como verdadeiras ou falsas, seus respectivos valores-verdade dependem da informação sobre um objeto que está indeterminado. Por exemplo, *Ele* pode significar João ou Pedro. Se João for um ótimo cozinheiro e Pedro não, a veracidade da primeira afirmação irá depender de quem é este *Ele* do qual estamos falando. Da mesma forma, o valor lógico da terceira afirmação muda se estivermos tratando de $x = 2$ ou de $x = 3$.

Tais sentenças declarativas que dependem de uma variável são chamadas de **sentenças abertas** ou **predicados**. Denotaremos por $P(x)$ um predicado que depende de uma variável x que pode ser qualquer elemento de um certo **conjunto universo de discurso** A. Dessa forma, associado a cada predicado deve existir um conjunto universo claro e bem definido, a fim de que não exista ambiguidade sobre os possíveis valores que as variáveis podem assumir.

Também podemos pensar em predicados que dependam de mais de uma variável, como é o caso da segunda afirmação declarativa apresentada no início desta seção. Quando falamos *"Ele e ela formam um lindo casal."*, este *Ele* pode ser qualquer elemento do conjunto H dos homens do mundo, enquanto *ela* pode ser qualquer elemento do conjunto M das mulheres do mundo. Dessa forma, esse predicado pode ser escrito como

$$x \in H, y \in M, Q(x, y),$$

em que $Q(x, y)$ corresponde a "x e y formam um lindo casal".

Observe que os predicados são generalizações das proposições, que podem ser entendidas como predicados nos quais o valor da variável é determinado. Por exemplo, *"João é um bom cozinheiro"* pode ser escrita simplesmente como $P(Joao)$. Outras notações comuns na literatura são escrever Px (em vez de $P(x)$) para predicados com um único objeto indeterminado e Qxy para predicados com dois objetos indeterminados.

Quando dois predicados $P(x)$ e $Q(x)$ possuem o mesmo conjunto universo, podemos construir novos predicados utilizando os conectivos apresentados para proposições para estabelecer novos predicados. Por exemplo:

1. *"Ele é médico e ele é cantor."* Pode ser escrito simbolicamente como
$$x \in H, (P(x) \wedge Q(x))$$
ou, ainda, como
$$x \in H, (P \wedge Q)(x)$$
que representa a sentença *"Ele é médico e cantor"*.

2. *"Se ele gosta de Matemática, então gosta de Filosofia."* pode ser escrito como
$$x \in H, (P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Também podemos utilizar conectivos para relacionar predicados com conjuntos universos distintos. Veja os exemplos a seguir:

1. *"Se ele for romântico, então ela será carinhosa."*
$$x \in H, y \in M, P(x) \rightarrow Q(y).$$

2. *"Ele é flamengista ou ela é vascaína"*
$$x \in H, y \in M, P(x) \vee Q(y).$$

Além dos conectivos, a*Lógica dos predicados* também permite o uso dos chamados **quantificadores** que são símbolos que representam noções de quantidade. Dentre os quantificadores mais utilizados estão o **quantificador universal** ($\forall$) e o **quantificador existencial** ($\exists$). Estes símbolos substituem as noções de *"para todo"* e *"existe pelo menos um"*, respectivamente. Além disso, utilizaremos o símbolo auxiliar (:) para substituir a expressão *"tal que"*. Exemplificando,

1. *Existe pelo menos um homem bom.*
$$\exists x \in H : P(x)$$
(em que $P(x)$ é a proposição "x é bom").

2. *Todas as mulheres são inteligentes.*
$$\forall y \in M, Q(y)$$
(em que $P(x)$ é a proposição "y é inteligente").

Este sistema formal que reúne os predicados, conectivos e quantificadores é chamado de **Lógica de Primeira Ordem**. Ele é uma generalização da Lógica Proposicional que havíamos estudado até o material anterior, a qual também é conhecida como Lógica de Ordem Zero.

È possível criar Lógicas de Ordens superiores a partir da Lógica dos Predicados. Essa noção de que podemos criar hierarquias para os sistemas lógicos foi desenvolvida inicialmente pelo matemático e filósofo inglês Bertrand Russell para evitar paradoxos filosóficos, tendo sido inicialmente chamada por ele de *Teoria dos Tipos.* Com o desenvolvimento dos computadores modernos e de novas linguagens de programação, a Teoria dos Tipos vem ganhando uma importante utilidade prática.

1.1 Negação de predicados com quantificadores

Para estabelecer a negação de predicados com quantificadores devemos ter uma atenção especial. Veja que a negação de "*pelo menos um homem é bom*" não é "*pelo menos um homem não é bom*"; o correto seria falar "*todos os homens são maus.*" De fato, a negação de um predicado com quantificador existencial é um predicado com quantificador universal e vice-versa. De modo formal, temos que:

$$\neg(\exists x \in A : P(x)) \equiv \forall x \in A, \neg P(x)$$

e

$$\neg(\forall x \in A, Q(x)) \equiv \exists x \in A, \neg Q(x).$$

Nesse ponto, um exercício interessante é compor tabelas verdade para verificar as equivalências acima. O fato de que elas são realmente equivalências é o que mostra que a negação de "*pelo menos um homem é bom*" realmente é "*todos os homens são maus*".

1.2 Proposições com mais de um quantificador

Por vezes, podemos construir sentenças que possuem dois ou mais quantificadores relacionando alguns objetos. Considere o exemplo

Todo indivíduo tem uma mãe.

Se A é o conjunto de todas as pessoas, observe que essa sentença anterior pode ser escrita da seguinte forma

$$\forall x \in A, \exists y \in A : P(x, y)$$

(com $P(x, y)$ sendo "y *é a mãe de* x").

Veja que essa proposição tem um sentido completamente distinto de

$$\exists y \in A : \forall x \in A, P(x, y).$$

Esta última significa *"existe uma pessoa que é mãe de todos"*. Dessa forma, devemos ter em mente que nem sempre poderemos trocar a ordem dos quantificadores sem mudar o significado de uma proposição. Porém, existem casos em que esta troca não altera o significado. Por exemplo, temos as equivalências

$$\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y) \equiv \forall y \in B, \forall x \in A, P(x, y)$$

e

$$\exists x \in A : \exists y \in B : P(x, y) \equiv \exists y \in B : \exists x \in A : P(x, y).$$

Agora considere a sentença a seguir e sua respectiva forma simbólica

"Para todo carro quebrado, existe um bom mecânico que pode consertá-lo se o carro não for importado."

$$\forall x \in A, \exists y \in B : \neg P(x) \to Q(x, y)$$

Acima, A representa o conjunto de todos os carros quebrados, B é o conjunto de todos os bons mecânicos, $P(x)$ significa que o carro x é importado e $Q(x, y)$ significa que o mecânico y pode consertar o carro x.

Qual seria a negação desta sentença? Utilizando as regras de negação de quantificadores, as Leis de De Morgan e a equivalência $p \to q \equiv \neg p \vee q$, temos:

$$\begin{aligned} &\neg(\forall x \in A, \exists y \in B : \neg P(x) \to Q(x, y)) \equiv \\ &\equiv \exists x \in A : \neg(\exists y \in B : \neg P(x) \to Q(x, y)) \\ &\equiv \exists x \in A : \forall y \in B, \neg(P(x) \vee Q(x, y)) \\ &\equiv \exists x \in A : \forall y \in B, \neg P(x) \wedge \neg Q(x, y)). \end{aligned}$$

A última proposição pode ser lida como

"Existe pelo menos um carro quebrado tal que todo bom mecânico não pode consertá-lo, mesmo o carro não sendo importado."

2 Argumentos com predicados

Na Lógica de Primeira Ordem, um argumento é uma sequência de predicados chamados de premissas, acompanhados por último predicado que é chamado de conclusão. Um argumento é válido se a veracidade conjunta das premissas implicar a veracidade da conclusão.

A título de ilustração, tomemos o famoso exemplo de Aristóteles:

Todo homem é mortal.
Socrátes é homem.
Logo, Socrátes é mortal.

Tal argumento pode ser escrito simbolicamente como

$$(\forall x \in A, H(x) \to M(x);\; H(socrates) \vdash M(socrates)).$$

Esse tipo de argumento, em que há duas premissas, a primeira universal, a segunda particular e uma conclusão particular é conhecido como **silogismo**. E o exemplo de Sócrates é um caso de Modus Tollens com predicados.

Para facilitar a formalização de argumentos na Lógica de Predicados, destacamos quatro tipos de sentenças abertas de especial interesse, denominadas **enunciados categóricos**. Cada uma destes predicados possui uma representação visual através de diagramas de Venn, os quais auxiliam na verificação da validade de argumentos. Os enunciados categóricos são:

(i) **Universal Afirmativo:** é uma sentença do tipo $\forall x \in A, (P(x) \to Q(x))$. Usando a linguagem de conjuntos, podemos dizer que o conjunto Q está contido no conjunto P. Esta propriedade é representada na Figura 1 (a).

(ii) **Universal Negativo:** é uma sentença do tipo $\forall x \in A, (P(x) \to \neg Q(x))$. Neste caso, dizemos que o conjunto Q e o conjunto P possuem interseção vazia. Esta propriedade é representada na Figura 1 (b).

(iii) **Particular Afirmativo:** é uma sentença do tipo $\exists x \in A : (P(x) \wedge Q(x))$. Neste caso, dizemos que o conjunto Q e o conjunto P possuem interseção não-vazia. Esta propriedade é representada na Figura 1 (c).

(iv) **Particular Negativo:** São sentenças do tipo $\exists x \in A : (P(x) \wedge \neg Q(x))$. Neste caso, dizemos que o conjunto P possui ao menos um elementos que não pertence ao conjunto Q. Esta propriedade é representada na Figura 1 (d).

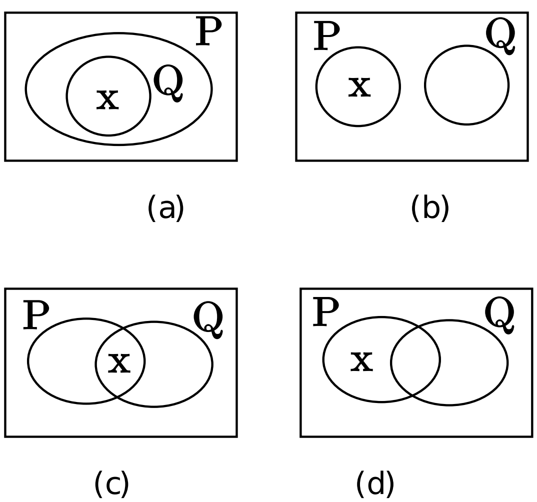


Figura 1: representação dos enunciados categóricos em diagramas de Venn.

Agora, vejamos num exemplo como é possível utilizar diagramas de Venn para analisar a validade de argumentos.

Exemplo 1. *Considerando que todo pintor é habilidoso e que alguns azulejistas não são habilidosos, é correto afirmar que:*

(a) Alguns pintores que são azulejistas não são habilidosos.

(b) Todo pintor que é azulejista é habilidoso.

(c) Nenhum pintor é azulejista.

(d) Todo azulejista é pintor.

(e) Quem não é azulejista é habilidoso.

Solução. Veja que o item (a) é falso, pois todo pintor é habilidoso e, mesmo que este pintor seja azulejista, isto não o fará não-habilidoso. O item (b) é correto. Isso pode ser verificado pelo diagrama de Venn na Figura 2.

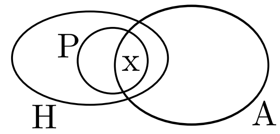


Figura 2: representação do item (b) do Exemplo 1.

O item (c) é falso, pois o conjunto dos pintores e o conjunto dos azulejistas não são necessariamente disjuntos. O item (d) é falso, pois a relação de inclusão entre os conjuntos em questão não é bem definida. Por fim, o item (e) é falso, pois não há relação direta entre ser habilidoso e ser azulejista.

□

Exemplo 2. *Escreva a seguinte sentença no formato simbólico e, em seguida, escreva sua negação em Português.*

"Existe pelo um cachorro preto ou todos os gatos são amarelos."

Solução. O formato simbólico correspondente é

$$\exists x \in C, P(x) \vee \forall y \in G, A(y).$$

Para construir a negação, além de trocarmos os quantificadores devemos usar as Lei de De Morgan, i.e., negar as proposições e trocar o conectivo $\vee$ por $\wedge$. Assim, a negação simbólica é:

$$\forall x \in C, \neg P(x) \wedge \exists y \in G, \neg A(y).$$

Por sua vez, a sentença simbólica acima pode ser traduzida para o Português como

"Todos os cachorros não são pretos e existe um gato que não é amarelo."

□

Exemplo 3. *Se, numa vila, todo torcedor do Arranca-Toco é homem, mas nem todo homem é torcedor do Arranca-Toco e todo torcedor do Tira-Canela é mulher, mas nem toda mulher é torcedor do Tira-Canela, então, nessa vila:*

(a) Existem homens que torcem pelo Tira-Canela.

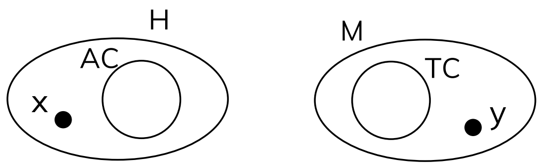
(b) Há mais de um homem que não torce pelo Arranca-Toco.

(c) Existe pelo menos uma mulher que torce pelo Arranca-Toco.

(d) Ninguém torce por outro time.

(e) Há pelo menos duas pessoas que não torcem nem pelo Arranca-Toco nem pelo Tira-Canela.

Solução. Considere o seguinte diagrama, que representa a situação descrita no enunciado:



O elemento x representa um homem que não torce para o Arranca-Toco e o elemento y representa uma mulher que não torce para o Tira-Canela. Como o conjunto dos homens tem interseção vazia com o conjunto das mulheres, x e y não torcem para nenhum dos dois times. A resposta correta é a alternativa (e).

□

3 Sugestões ao professor

Separe dois encontros de 50 minutos para desenvolver o conteúdo deste material. É de fundamental importância que os alunos aprendam as diferenças entre os quantificadores universais e existenciais, além da forma da negação das proposições com quantificadores. Tal conhecimento é fundamental para aplicar técnicas de demonstração em que utilizamos contrapositivas.

Referências

[1] Augusto C. Morgado and Benjamin César. *Raciocínio Lógico-Quantitativo.* Elsevier, 2006.

[2] Paulo. Quilelli. *Raciocínio Lógico Matemático.* Editora Ferreira, 2009.

[3] Henrique Rocha. *Raciocínio Lógico: Você Consegue Aprender.* Editora Campus, 2006.