Material Teórico - Tópicos Adicionais - Recorrências

Recorrências - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de janeiro de 2020

1 Resolvendo recorrências

Damos continuidade ao estudo de *recorrências*, agora com interesse especial em classificar e resolver as recorrências que foram obtidas na primeira parte dessa aula.

Lembre-se de que *resolver uma recorrência* significa usar a relação de recorrência e os primeiros termos de uma sequência que satisfaz essa relação para obter a lei de formação da sequência. Dada a generalidade desse problema, não existe um método único que possa resolver toda recorrência, mas sim métodos específicos para recorrências de certos tipos. Por isso, precisamos reconhecer o formato da recorrência para, depois, tentar resolvê-la.

As recorrências mais simples são aquelas em que cada termo da sequência depende apenas do termo imediatamente anterior a ele. No entanto, mesmo nesse caso, se a relação entre os termos for algo um pouco mais complicado (por exemplo, $T_{n+1} = (T_n)^2 + \sqrt{T_n}$), pode ser difícil encontrar uma fórmula fechada para a lei de formação. Nas seções seguintes, vamos aprender a resolver apenas o caso mais simples das recorrências de primeira ordem, as lineares com coeficientes constantes. Ainda assim, veremos que esse caso generaliza e combina resultados estudados do Ensino Médio sobre progressões aritméticas e geométricas.

1.1 Recorrências lineares de 1ª ordem com coeficientes constantes

Considere a sequência $(T_n)_{n\geq 1}$ que satisfaz uma recorrência de primeira ordem. A recorrência é classificado como **linear com coeficientes constantes** quando é da forma:

$$T_{n+1} = aT_n + b, \text{ para todo } n, \tag{1}$$

onde a e b são números reais fixos. O nome "linear" vem da relação com a função linear $F(x) = ax + b$, em que $T_{n+1} = F(T_n)$, e a expressão "coeficientes constantes" se refere ao fato de que os valores de a e b não dependem do valor de n, ou seja, a e b são constantes.

No caso particular em que $a = 1$, temos uma Progressão Aritmética de razão b: $T_{n+1} = T_n + b$. Vejamos como resovê-la através de um exemplo em que $b = 6$.

Exemplo 1. *Resolva a recorrência* $T_{n+1} = T_n + 6$ *e* $T_1 = 4$.

Solução. Escrevamos a relação de recorrência para diversos valores de n, começando com $n = 1$.

$$\begin{cases} T_2 = T_1 + 6 \\ T_3 = T_2 + 6 \\ \vdots \\ T_n = T_{n-1} + 6 \end{cases}.$$

Agora, somemos todas essas igualdades membro a membro, obtendo:

$$T_2 + T_3 + \ldots + T_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + \underbrace{(6 + 6 + \ldots + 6)}_{n-1}.$$

É importante atentar para a quantidade de vezes em que o número 6 aparece. Neste exemplo, veja pelo lado direito das igualdades que o índice de T varia de 1 até $n-1$, logo, há $n-1$ equações, cada uma com uma parcela 6. Além disso, os termos $T_2, \ldots, T_{n-1}$ aparecem em ambos os lados da última igualdade, cada um exatamente uma vez; portanto, eles se cancelam, restando apenas a relação:

$$T_n = T_1 + 6(n-1).$$

Como $T_1 = 4$, temos a lei de formação:

$$T_n = 4 + 6(n-1). \qquad \square$$

Problema 2 (Termo geral de uma PA). *Mostre que se* $T_{n+1} = T_n + r$ *para todo* $n \geq 1$, *então* $T_n = T_1 + (n-1)r$.

Continuando, resolvamos um exemplo de recorrência obtida na aula passada.

Exemplo 3. *Seja* S_n *a soma, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com* n *lados. Sabendo que* $S_{n+1} = S_n + 180$ *para todo* $n \geq 3$ *e que* $S_3 = 180$, *encontre uma fórmula fechada para* S_n.

Solução. Um cuidado que devemos ter aqui é que a sequência S_n só começa com $n = 3$ (ao contrário das anteriores que começam com $n = 1$). Apesar disso, o mesmo método pode ser usado. Basta escrever as primeiras relações de recorrência e contar quantas vezes estamos somando 180:

$$\begin{cases} S_4 = S_3 + 180 \\ S_5 = S_4 + 180 \\ \vdots \\ S_n = S_{n-1} + 180 \end{cases}.$$

Os índices de S, no lado esquerdo, variam de 4 até n. Isso nos mostra que temos $n-3$ equações. Podemos perceber isso pois estamos removendo do conjunto de índices $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, que possui n elementos, os seus 3 primeiros elementos, 1, 2, 3, ficando com os $n-3$ índices restantes. Se somarmos todas as igualdades acima, os termos $S_4, \ldots, S_{n-1}$, que aparecem em ambos os lados, serão cancelados, restando apenas:

$$S_n = S_3 + \underbrace{180 + 180 + \ldots + 180}_{n-3} = S_3 + 180(n-3).$$

Por fim, como $S_3 = 180$, segue que

$$S_n = 180 + 180(n-3) = 180(n-2),$$

para todo $n \geq 3$. $\square$

Outro caso notável na equação (1) é aquele em que $b = 0$. Neste caso, temos uma Progressão Geométrica (PG) de razão 'a': $T_{n+1} = aT_n$. Vejamos como solucioná-la no exemplo a seguir, em que $a = 3$ e $b = 0$.

Exemplo 4. *Resolva a recorrência $T_{n+1} = 3T_n$, sabendo que $T_1 = 2$.*

Solução. Vamos utilizar a mesma ideia do Exemplo 1, mas, ao invés de somar as equações, iremos multiplicá-las.

$$\begin{cases} T_2 = 3T_1, \\ T_3 = 3T_2, \\ \vdots \\ T_n = 3T_{n-1}. \end{cases}$$

Multiplicando todas essas equações obtemos:

$$T_2 \cdot T_3 \cdot \ldots \cdot T_n = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3)}_{n-1} T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_{n-1}$$

Cancelando os termos repetidos (observe que eles são não nulos!), obtemos $T_n = 3^{n-1}T_1$. Como $T_1 = 2$, a lei de formação da sequência é

$$T_n = 2 \cdot 3^{n-1}. \qquad \square$$

Problema 5 (Termo geral de uma PG). *Mostre que, se $T_{n+1} = qT_n$ para todo $n \geq 1$, então $T_n = T_1 \cdot q^{n-1}$.*

Neste aula, no que diz respeito a PA's e PG's, vamos nos limitar a demonstrar como obter seus termos gerais. Para outras propriedades dessas sequências, como por exemplo as fórmulas para as somas de seus primeiros n termos, consulte os módulos "Progressões Aritméticas" e "Progressões Geométricas", do Primeiro Ano do Ensino Médio. Em alguns dos exemplos seguintes, vamos precisar usar essas fórmulas, por isso as listamos abaixo.

Exemplo 6 (Soma dos termos de uma PA). *Se $(T_n)_{n\geq 1}$ é uma PA, então a soma de seus n primeiros termos é dada por:*

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{n(T_1 + T_n)}{2}.$$

Exemplo 7 (Soma dos termos de uma PG). *Se $(T_n)_{n\geq 1}$ é uma PG de razão $q \neq 1$, então a soma de seus n primeiros termos é dada por*

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + \ldots + T_n &= T_1 + qT_1 + \ldots + q^{n-1}T_1 \\ &= \frac{T_1(q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

Vejamos, agora, uma sequência que mescla as anteriores. Alguns autores gostam de chamar esse tipo de sequência de Progressão Aritmética-Geométrica mista (PAG).

Exemplo 8. *Encontre a lei de formação da sequência $(T_n)_{n\geq 1}$ que satisfaz $T_1 = 6$ e $T_{n+1} = 3T_n + 8$.*

Solução. Comece escrevendo as primeiras relações obtidas a partir da lei de recorrência (isto é, para $n = 1$, 2, 3, etc), assim como nas soluções do exemplos anteriores (dessa vez, vamos exibir mais dessas relações, para ficar mais fácil de visualizar um padrão).

$$\begin{cases} T_2 = 3T_1 + 8, \\ T_3 = 3T_2 + 8, \\ \vdots \\ T_{n-2} = 3T_{n-3} + 8, \\ T_{n-1} = 3T_{n-2} + 8, \\ T_n = 3T_{n-1} + 8. \end{cases}$$

Como antes, nosso objetivo é manipular esse sistema, de modo que reste apenas T_n (e uma função de n e T_1), após eliminarmos os termos $T_2, \ldots, T_{n-1}$. Porém, dessa vez, se apenas somarmos as equações, quase nenhum dos termos será eliminado, pois os coeficientes dos termos do lado direito são iguais a 3 e do lado esquerdo são iguais a 1. (O truque de multiplicar todas as equações também não funciona de forma direta). Vamos analisar as equações de baixo para cima.

Para conseguir eliminar a variável T_{n-1}, vamos multiplicar a penúltima equação por 3, obtendo:

$$3T_{n-1} = 3^2T_{n-2} + 8 \cdot 3. \tag{2}$$

Assim, se somarmos essa equação com a última do sistema original, eliminamos a variável T_{n-1}. Porém, para conseguir eliminar T_{n-2}, precisamos multiplicar a (antepenúltima) equação $T_{n-2} = 3T_{n-3} + 8$ por 3^2 (que é o coeficiente de T_{n-2} em (2)); seguindo essa ideia, para cada i de 1 a $n-2$ vamos multiplicar $T_{n-i} = 3T_{n-i-1} + 8$ por 3^i, obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} 3^{n-2}T_2 = 3^{n-1}T_1 + 8 \cdot 3^{n-2}, \\ 3^{n-3}T_3 = 3^{n-2}T_2 + 8 \cdot 3^{n-3}, \\ \vdots \\ 3^2T_{n-2} = 3^3T_{n-3} + 8 \cdot 3^2, \\ 3T_{n-1} = 3^2T_{n-2} + 8 \cdot 3, \\ T_n = 3T_{n-1} + 8. \end{cases}$$

Agora sim, somando todas as equações do sistema acima, cada termo da forma $3^{n-j}T_j$ do lado esquerdo (para j variando de 2 a $n-1$) será cancelado com seu par do lado direito, restando apenas:

$$T_n = 3^{n-1}T_1 + (8 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 3^2 + \ldots + 8 \cdot 3^{n-3} + 8 \cdot 3^{n-2}).$$

As parcelas entre os parênteses do lado direito formam a soma dos $n-1$ primeiros termos de uma PG cujo primeiro termo é 8 e cuja razão é 3. Utilizando o resultado do Exemplo 7, obtemos:

$$T_n = 3^{n-1}T_1 + \frac{8(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}.$$

Para finalizar, usamos que $T_1 = 6$ e simplificamos a lei de formação para:

$$T_n = 6 \cdot 3^{n-1} + 4(3^{n-1} - 1) = 10 \cdot 3^{n-1} - 4.$$

□

Solução alternativa. Divida ambos os lados da equação de recorrência $T_{n+1} = 3T_n + 8$ por 3^{n+1}, obtendo:

$$\frac{T_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{T_n}{3^n} + \frac{8}{3^{n+1}}.$$

Agora, defina outra sequência S_n, em que $S_n = \frac{T_n}{3^n}$ para todo n (isso é o que se chama fazer uma *substituição de variável*). Veja que S_n satisfaz $S_1 = T_1/3 = 6/3 = 2$ e $S_{n+1} = S_n + \frac{8}{3^{n+1}}$. Podemos encontrar a lei de formação para S_n escrevendo as n primeiras equações de recorrência e somando-as (como no caso de uma PA):

$$\begin{cases} S_2 = S_1 + 8/3^2, \\ S_3 = S_2 + 8/3^3, \\ \vdots \\ S_n = S_{n-1} + 8/3^n. \end{cases}$$

Ao somar todas essas equações, os termos $S_2, \ldots, S_{n-1}$ serão cancelados, restando apenas:

$$S_n = S_1 + \frac{8}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \ldots + \frac{8}{3^n}.$$

Nesse ponto, lembre-se de que $S_n = \frac{T_n}{3^n}$ e $S_1 = 2$. Então, substituindo esses valores na expressão acima e multiplicando ambos os lados por 3^n, obtemos:

$$T_n = 2 \cdot 3^n + 8 \cdot 3^{n-2} + 8 \cdot 3^{n-3} + \ldots + 8,$$

que é a mesma expressão obtida ao longo da solução anterior, podendo ser simplificada da mesma forma. □

Observação 9. *Ainda em relação ao exemplo anterior, não é obrigatório verificarmos que a resposta final está correta, já que demonstramos que a única sequência que satisfaz as condições do enunciado é* $T_n = 3^{n-1} - 4$. *Contudo, fazer essa verificação é uma boa prática e nos ajuda a ter mais segurança de não termos cometido pequenos erros com os cálculos. Para isso, podemos calcular os valores de* T_2, T_3, *etc, de duas formas. Primeiro, usando a recorrência:* $T_{n+1} = 3T_n + 8$. *Como* $T_1 = 6$, *temos que* $T_2 = 3 \cdot T_1 + 8 = 18 + 8 = 26$*; em seguida,* $T_3 = 3 \cdot T_2 + 8 = 3 \cdot 26 + 8 = 78 + 8 = 86$. *A outra forma é aplicando a lei de formação que obtivemos:* $T_n = 10 \cdot 3^{n-1} - 4$. *Para* $n = 1$, *temos que* $T_1 = 10 \cdot 3^0 - 4 = 10 - 4 = 6$*; para* $n = 2$, *temos* $T_2 = 10 \cdot 3 - 4 = 20 - 4 = 26$*; por fim, para* $n = 3$, *temos* $T_3 = 10 \cdot 3^2 - 4 = 90 - 4 = 86$. *Calculando de ambas as formas, obtivemos os mesmos valores, como esperado. Isso sozinho não garante que a solução do exemplo esteja correta, mas nos dá um indício positivo de que ela esteja. Por outro lado, se houvesse divergência nos valores obtidos, então teríamos certeza de que cometemos algum erro.*

Problema 10 (Termo geral de uma PAG)**.** *Mostre que, se* $T_{n+1} = aT_n + b$ *para todo* $n \geq 1$, *com* $a \neq 1$, *então*

$$T_n = T_1 \cdot a^{n-1} + \frac{b(a^{n-1} - 1)}{a - 1}.$$

A recorrência que obtivemos para a Torre de Hanói na Parte 1 dessa aula possui o formato acima: é uma recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes, tal que $a = 2$ e $b = 1$.

Exemplo 11. *Seja* X_n *o número mínimo de movimentos para resolver o problema da Torre de Hanói com* n *discos. Na primeira parte dessa aula, vimos que* $X_1 = 1$ *e que* $X_{n+1} = 2X_n + 1$ *para todo* $n \geq 1$. *Substituindo* $a = 2$ *e* $b = 1$ *na formula enunciada no Problema 10, encontramos a fórmula fechada para* X_n*:*

$$\begin{aligned} X_n &= 1 \cdot 2^{n-1} + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Observação 12. *Para aplicar as formulas anteriores, é preciso que o coeficiente de* T_{n+1} *na equação de recorrência seja igual a 1. Se tivermos, por exemplo, uma recorrência da forma* $cT_{n+1} = aT_n + b$ *(com* $c \neq 0$*, claro), precisamos primeiro simplificá-la para* $T_{n+1} = (a/c)T_n + (b/c)$*; só então podemos utilizar a fórmula dada no Problema 10 ou, então, aplicar um dos métodos discutidos no Exemplo 8.*

Problema 13. *Encontre a lei de formação da sequência* $(T_n)_{n \geq 1}$, *sabendo que* $T_1 = 1$ *e que* $2T_{n+1} = 3T_n + 8$.

1.2 Recorrências lineares de 1ª ordem gerais

Quando trocamos as constantes a e b na expressão $T_{n+1} = aT_n + b$, por funções (não constantes) de n, digamos $T_{n+1} = f(n)T_n + g(n)$, continuamos chamando a última relação acima de "recorrência linear de primeira ordem" (mas veja que ela deixa de ter os coeficients constantes). É interessante observar que as funções $f(n)$ e $g(n)$ não precisam ser lineares para que a recorrência seja considerada linear. Por exemplo, a recorrência

$$T_{n+1} = n^2 T_n + 2^n$$

é considerada linear, apesar do fato de que $f(n) = n^2$ é uma função quadrática e $g(n) = 2^n$ é uma função exponencial. Por outro lado, uma recorrência do tipo $T_{n+1} = T_n^2 + 1$, apesar de ainda ser de primeira ordem, já não é linear, pois o próprio T_n está elevado ao quadrado, não sendo possível escrever essa expressão no formato $T_{n+1} = f(n)T_n + g(n)$.

Há dois casos simples em que podemos resolver recorrências lineares de primeira ordem: (i) quando $f(n) = 1$ para todo n natural e (ii) quando $g(n) = 0$ para todo n natural. Vejamos o que fazer em cada caso.

Exemplo 14. *Mostre como resolver uma recorrência da forma $T_{n+1} = T_n + g(n)$.*

Solução. Como é de esperar, podemos resolvê-la simplesmente somando as $n-1$ primeiras relações de recorrências:

$$\begin{cases} T_2 = T_1 + g(1), \\ T_3 = T_2 + g(2), \\ \vdots \\ T_n = T_{n-1} + g(n-1). \end{cases}$$

Assim fazendo, e cancelando os termos que aparecerão em ambos os lados, obtemos:

$$T_n = T_1 + g(1) + g(2) + \ldots + g(n-1). \quad \square$$

Formalmente, a última relação acima já resolve a recorrência, pois nela T_n depende apenas de T_1 e de uma função que depende apenas de n, não sendo necessário calcular os demais termos da sequência. Moralmente, ainda seria interessante simplificar a soma $g(1) + g(2) + \ldots + g(n-1)$, o que pode ser muito simples ou bastante complicado, a depender de qual seja a função $g(n)$.

Exemplo 15. *Resolva a recorrência em que $T_1 = 0$ e $T_{n+1} = T_n + 2^n + n$.*

Solução. Seguindo a solução do Exemplo 14 (tomando $g(n) = 2^n + n$ e usando que $T_1 = 0$), temos que:

$$\begin{aligned} T_n &= g(1) + g(2) + \ldots + g(n-1) \\ &= (2^1 + 1) + (2^2 + 2) + \ldots + (2^{n-1} + (n-1)). \end{aligned}$$

Reordenando as parcelas, temos:

$$T_n = (2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + \ldots + (n-1)).$$

A primeira soma é a soma dos termos de uma PG e a segunda é a soma dos termos de uma PA. Aplicando as respectivas fórmulas, obtemos

$$T_n = (2^n - 1) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

$\square$

Por outro lado, se a recorrência do último exemplo acima fosse da forma $T_{n+1} = T_n + \sqrt{n}$ (ou seja, se $g(n) = \sqrt{n}$), obteríamos

$$T_n = T_1 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n-1},$$

mas não há como simplificar substancialmente essa expressão sem usar aproximações.

Dois exemplos discutidos na primeira parte dessa aula também geraram recorrências do tipo (i). Vejamos como resolver um deles.

Exemplo 16. *Vimos, na primeira parte da aula, que o número de diagonais de um polígono convexo com n lados satisfaz a relação de recorrência: $D_{n+1} = D_n + n - 1$ para todo $n \geq 3$, com $D_3 = 0$. Temos que*

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Solução. Argumentando como no caso geral anterior (com D_n no lugar de T_n, com $g(n) = n - 1$ e começando a partir de $n = 3$), obtemos (verifique!)

$$\begin{aligned} D_n &= D_3 + g(3) + g(4) + \ldots + g(n-1) \\ &= 0 + 2 + 3 + \ldots + n - 2 \\ &= \frac{n(n-3)}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Deixaremos o outro exemplo da aula passada como execício.

Problema 17. *Seja R_n a solução do problema da Pizza de Steiner (veja a primeira parte da aula). Vimos que $R_1 = 1$ e $R_{n+1} = R_n + n + 1$ para todo $n \geq 1$. Mostre que $R_n = (n^2 + n + 2)/2$ para todo $n \geq 1$.*

Considere, agora, o caso alternativo, (ii), em que $g(n) = 0$ para todo n e $f(n)$ é uma função qualquer.

Exemplo 18. *Mostre como resolver uma recorrência da forma $T_{n+1} = f(n)T_n$, admitindo que T_1 e $f(n) \neq 0$, para todo $n \geq 1$.*

Solução. Usamos a mesma técnica aplicada para encontrar o termo geral de uma progressão geométrica: escrever as primeiras equações de recorrência, multiplicá-las e cancelar fatores comuns a ambos os membros.

Procedendo dessa forma, obtemos inicialmente as relações:

$$\begin{aligned} T_2 &= f(1)T_1, \\ T_3 &= f(2)T_2, \\ &\vdots \\ T_n &= f(n-1)T_{n-1}. \end{aligned}$$

A partir delas, é imediato que $T_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Então, multiplicando as relações acima membro a membro, ficamos com

$$T_2 \ldots T_{n-1} T_n = T_1 T_2 \ldots T_{n-1} \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1).$$

Por fim, cancelando o fator comum (não nulo) $T_2 \ldots T_{n-1}$, chegamos a:

$$T_n = T_1 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1). \quad \square$$

Uma observação análoga à que fizemos após o Exemplo 14 se aplica aqui: enquanto que, formalmente, a resposta acima já resolve a recorrência, é desejável simplificar o produto $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1)$, o que pode ser algo simples ou não, a depender de qual é a função $f(n)$.

Problema 19. *Seja $(T_n)_{n\geq 0}$ uma sequência tal que $T_0 = 1$ e $T_n = 2nT_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Mostre que $T_n = n!\,2^n$ para todo $n \geq 0$. (Atente para o fato de que, neste exemplo, estamos partindo de T_0 e não de T_1).*

Por fim, o caso misto, em que $g(n) \neq 0$ e $f(n) \neq 1$, pode ser resolvido com ideias semelhantes às que utilizamos para resolver a PAG do Exemplo 8. Ambas as soluções de tal exemplo podem ser adaptadas para o caso geral, mas produzem fórmulas um tanto longas. Vejamos como fica, seguindo as ideias da "Solução Alternativa" do Exemplo 8.

Exemplo 20. *Sabendo que $f(n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$, indique como resolver uma recorrência do tipo $T_{n+1} = f(n)T_n + g(n)$ através de uma substituição de variáveis.*

Solução. Considere primeiro uma outra sequência (mais simples) em que $S_1 = 1$ e $S_{n+1} = f(n)S_n$ para todo $n \geq 0$. Pelo que aprendemos na solução do caso $g(n) = 0$, segue que a lei de formação de S_n é $S_n = f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n-1)$. Agora, divida a equação do enunciado ($T_{n+1} = f(n)T_n + g(n)$) por S_{n+1}, para obter:

$$\begin{aligned}\frac{T_{n+1}}{S_{n+1}} &= \frac{f(n)T_n}{S_{n+1}} + \frac{g(n)}{S_{n+1}}\\ &= \frac{T_n}{S_n} + \frac{g(n)}{S_{n+1}}.\end{aligned}$$

Com isso, se definirmos um terceira sequência $(R_n)_{n\geq 1}$, fazendo $R_n = \frac{T_n}{S_n}$ para todo n. Essa nova sequência satisfaz $R_1 = T_1$ e

$$R_{n+1} = R_n + \frac{g(n)}{S_{n+1}}.$$

Considerando a função $h(n) = \frac{g(n)}{S_{n+1}}$, temos que $R_{n+1} = R_n + h(n)$, logo, podemos obter a lei de formação para R_n usando o método do Exemplo 14:

$$\begin{aligned}R_n &= R_1 + h(1) + h(2) + \ldots h(n-1)\\ &= T_1 + \frac{g(1)}{S_2} + \frac{g(2)}{S_3} + \frac{g(n-1)}{S_n}.\end{aligned}$$

Por fim, tendo obtido as leis de formação de S_n e de R_n, basta usar que $T_n = R_n\,S_n$ para obter a lei de formação de T_n. □

Problema 21. *Resolva a recorrência $T_{n+1} = 3T_n + 2^n$, para todo $n \geq 0$, onde $T_1 = 2$.*

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo dessa aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos. Mais interessante do que ensinar aos alunos a memorizarem as fórmulas aqui encontradas é ensinar aos mesmos os métodos empregados para obtê-las. Aprender as fórmulas pode ser útil para resolver problemas rapidamente, mas acaba por afastar os alunos de ideias importantes, que podem ser usadas também na resolução de problemas mais complicados. A referência a seguir também contém material sobre recorrências, assim como o site `https://poti.impa.br`.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.