Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

O Contraexemplo

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

12 de agosto de 2019

1 Refutando conjecturas

Após algumas aulas sobre teoremas e demonstrações, os alunos podem estar curiosos sobre como um teorema nasce. Em geral, um teorema (ou resultado) matemático surge a partir da observação de um padrão. Tome por exemplo a função quadrática $f(n) = n^2 + n + 41$. Vamos calcular todos os seus valores para $n = 1, 2, 3, ..., 7$.

n	$f(n)$
1	$f(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$
2	$f(2) = 2^2 + 2 + 41 = 47$
3	$f(3) = 3^2 + 3 + 41 = 53$
4	$f(4) = 4^2 + 4 + 41 = 61$
5	$f(5) = 5^2 + 5 + 41 = 71$
6	$f(6) = 6^2 + 6 + 41 = 83$
7	$f(7) = 7^2 + 7 + 41 = 97$

Observe que os valores $f(1), f(2), ..., f(7)$ são todos números primos. Tal constatação pode nos levar a formular a seguinte **conjectura**:

"*Para todo inteiro n, $f(n)$ é um número primo.*"

Uma conjectura é uma afirmação que ainda não foi provada. Ela pode até mesmo ser abandonada, caso alguém dê um **contraexemplo** que a refute. Esse é o caso da conjectura anterior. Veja que, para $n = 41$, temos:

$$f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43,$$

de modo que $f(41)$ não é primo. Portanto, a conjectura é falsa.

Esse exemplo deixa claro que apenas a percepção de um aparente padrão não é um argumento forte o suficiente para justificar a veracidade de uma propriedade. O próximo exemplo também tem um padrão que só é quebrado após um número bem maior de tentativas.

Exemplo 1. *Considere a proposição a seguir:*

"Não existe um número natural n tal que o número $\sqrt{89n^2 + 1}$ também seja um número natural."

Se alguém procurar um contraexemplo testando sucessivamente $n = 1, 2, 3, \ldots$, não será bem-sucedido rapidamente. Mas, se não for desencorajado e continuar examinando (com a ajuda de um computador), o primeiro contraexemplo será encontrado quando $n = 53.000$. De fato, observe que

$$89(53.000)^2 + 1 = 250.001.000.001 = 500.001^2.$$

Em [1], Gabriel e Andreas J. Stylianides cunharam o termo *contraexemplos monstruosos* para descrever exemplos como estes. Assim, percebe-se que uma conjectura pode levar bastante tempo para ser demonstrada ou refutada.

2 O último teorema de Fermat

Uma das conjecturas mais famosas da história da Matemática, a qual durou mais de trezentos e cinquenta anos para ser provada, ficou conhecida como **O último teorema de Fermat** cujo o enunciado é o seguinte:

Teorema 2. *Seja $n > 2$ um inteiro positivo dado. Então não existem inteiros positivos a, b e c tais que*

$$a^n + b^n = c^n.$$

Pierre de Fermat propôs pela primeira vez esse teorema por volta do ano 1637. Apesar de ser um matemático amador que só resolvia problemas em seu tempo livre, Fermat foi um grande matemático. Trabalhando em isolamento em sua casa no sul da França, seu único companheiro matemático foi um livro chamado *Arithmetica*, escrito por Diofanto de Alexandria no século III d.C. e que tratava sobre números inteiros e suas propriedades de divisibilidade.

Figura 1: retrato de Pierre de Fermat.

Foi estudando por este livro que Fermat conjecturou e demonstrou diversos fatos interessantes sobre divisibilidade. Dentre eles, encontra-se o que conhecemos hoje como **o pequeno teorema de Fermat**, que afirma que $a^p - a$ é sempre múltiplo de p, quando p é um primo e a é um inteiro qualquer.

Por outro lado, Fermat também gostava de formular conjecturas sem escrever demonstrações rigorosas que justificassem suas veracidades. Lendo o livro de Diofanto, Fermat se deparou com a seguinte equação:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Essa equação advém do famoso Teorema de Pitágoras sobre triângulos retângulos, e Diofanto estava interessado em descobrir quais eram todas as soluções inteiras positivas para essa equação. Algumas dessas são apresentadas a seguir:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$133^2 + 156^2 = 205^2.$$

Inspirado por este problema, Fermat decidiu ir além e procurar soluções inteiras para a equação quando o expoente era maior do que 2.

Após diversas tentativas frustadas de achar uma solução, ele deduziu que era simplesmente impossível achar tais soluções e escreveu em um canto de uma das páginas da sua cópia do livro de Diofanto a seguinte frase em Latim: *"Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet."*. Traduzida, ela significa: "*Eu descobri uma prova verdadeiramente maravilhosa para isso, mas essa margem é muito estreita para escrevê-la.*"

Anos mais tarde, após a morte de Fermat, seu livro, juntamente com suas anotações de margem, foi levado ao encontro da comunidade de matemáticos da época. Muitos ficaram curiosos com a nota de margem feita por Fermat e tentaram, em vão, achar uma solução completa. Em verdade, progressos dignos de nota só foram conseguidos quase um século após o tempo de Fermat, e uma demonstração completa só foi encontrada em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles.

É importante mencionar que, ao longo desses 350 anos, muitas ferramentas e técnicas matemáticas novas foram criadas na tentativa de se demonstrar o último teorema de Fermat.

Uma curiosidade: o último teorema de Fermat se tornou uma conjectura tão famosa que rendeu até mesmo uma aparição na conhecida série de tv *Os Simpsons*.

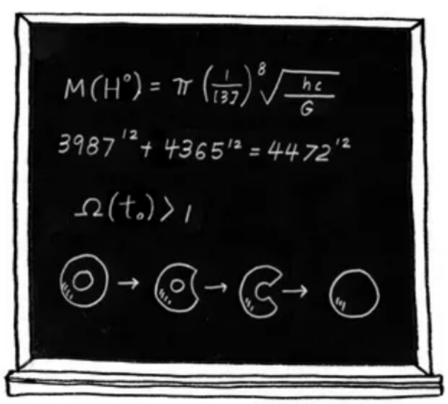

Figura 2: parte de uma cena de um episódio de Os Simpsons.

No episódio *The Wizard of Evergreen Terrace*, transmitido em 20 de setembro de 1998, no Estados Unidos, Homer Simpson escreve a seguinte equação:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}.$$

Porém, esse contraexemplo não está correto. Veja que os dois números no lado esquerdo são quadrados ímpares e, portanto, deixam resto 1 na divisão por 4; logo, o resto de quando você divide o lado esquerdo por 4 é 2. No entanto, o lado direito é um múltiplo de 4, pois é o quadrado de um número par.

3 Outras conjecturas famosas

Exemplo 3. *Outra conjectura famosa, também proposta por Fermat, afirmava que todos os números da forma* $2^{2^n} + 1$*, para* $n \geq 1$ *inteiro, são primos. Essa conjectura foi refutada pelo matemático Leonhard Euler em* 1732 *pelo seguinte contraexemplo:*

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417.$$

Apesar de ter refutado uma conjectura falsa de Fermat, Euler também criou conjecturas que foram refutadas anos após. Vejamos um

Exemplo 4. *Euler (1707-1783) conjecturou que não existiriam inteiros positivos* a, b, c, d *tais que*

$$a^4 = b^4 + c^4 + d^4.$$

Porém, em 1986, o matemático Noam Elkies descobriu que

$$20.615.673^4 = 2.682.440^4 + 15.365.639^4 + 18.796.760^4.$$

Até hoje, existem em Matemática várias conjecturas antigas que não foram demonstradas nem refutadas através de contraexemplos. Dentre elas, destacamos duas por suas simplicidades:

I. A **conjectura de Goldbach**, que afirma que qualquer número par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois primos. Por exemplo,

$$4 = 2 + 2;$$
$$6 = 3 + 3;$$
$$8 = 5 + 3;$$
$$10 = 7 + 3;$$
$$\vdots$$

Esta conjectura, formulada em 1742, continua sem demonstração, apesar de verificações computacionais terem confirmado que ela é válida pelo menos até o número $4 \cdot 10^{14}$.

II. A **conjectura dos primos gêmeos**, que afirma que existem infinitos pares de primos cuja diferença é 2.

Tais conjeturas são conhecidas como **problemas em aberto**, e demonstrá-las ou refutá-las são o objetivo de muitos matemáticos profissionais.

4 Sugestões ao professor

Após apresentar os diversos contraexemplos deste material, o significado da prova na Matemática torna-se visível. Mesmo observações consecutivas e longas não podem garantir a validade de uma hipótese e, como observado, a qualquer momento alguém pode fornecer um contraexemplo que rejeite uma conjectura, mesmo que muito antiga ou aparentemente verdadeira.

De um ponto de vista pedagógico, os exemplos históricos das tentativas de provar ou refutar conjecturas poderiam ajudar os estudantes a perceber mais profundamente que um número limitado de observações não garante a correção de uma conjuntura, ainda que haja muitos exemplos a seu favor. Além disso, também mostra como a demonstração de um teorema pode ser uma aventura épica, sobrevivendo aos séculos e às tentativas de diversos matemáticos conceituados, até que alguém seja capaz de, finalmente, encontrar um contraexemplo ou uma prova correta.

Para saber mais sobre a história do último teorema de Fermat, recomendamos o site `https://boingboing.net/2014/10/17/homers-last-theorem.html` ou a excelente leitura [2].

Referências

[1] Gabriel J. Stylianides Andreas J. Stylianides. 'cognitive conflict' as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof. *Article for TSG-18*, 2008.

[2] Simon Singh. *O Último Teorema de Fermat*. Record, 2002.