Material Teórico - Desigualdades Elementares Parte 3

Desigualdades Elementares

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

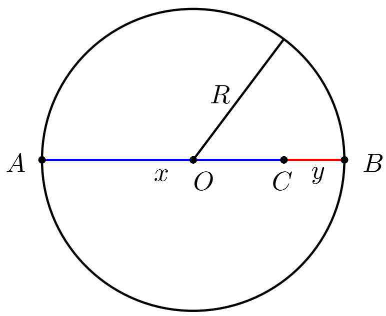
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

9 de novembro de 2019

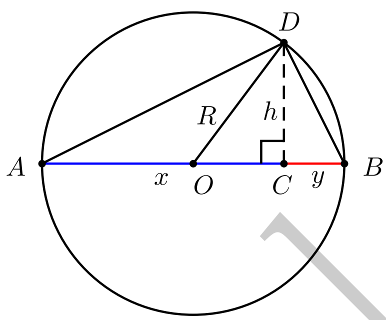
1 Desigualdades Elementares

Neste material, apresentaremos uma interpretação geométrica para a desigualdade entre as médias aritmética, geométrica e harmônica, no caso de dois números.

Dados x e y números reais positivos, sejam AB um segmento com medida igual a $x + y$ e C um ponto sobre AB tal que $\overline{AC} = x$ e $\overline{BC} = y$. Trace, ainda, o círculo de centro O e diâmetro AB (acompanhe na figura a seguir). Se R é o raio do círculo, então $R = \frac{x+y}{2}$, ou seja, o raio do círculo é igual à média aritmética de x e y.



Agora, seja D o ponto de interseção da perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto C com o semicírculo superior. Também, denote $h = \overline{CD}$ (acompanhe na próxima figura).



Veja que o triângulo ADB é retângulo em D, pois está inscrito em um semicírculo. Logo, podemos invocar as relações métricas em triângulos retângulos para concluir que $h^2 = xy$ ou, o que é o mesmo, $h = \sqrt{xy}$. Assim, h é a média geométrica de x e y.

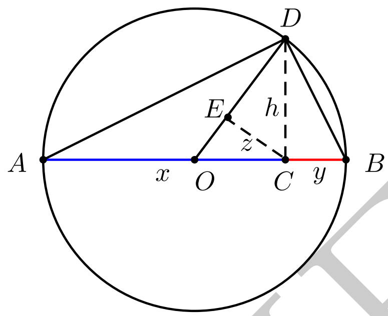
Se $x \neq y$, temos que h é um dos catetos e R é a hipotenusa do triângulo ODB, logo, $R > h$ ou, equivalentemente,

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}.$$

Se $x = y$, então $R = h$, ou seja, $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$.

Continuando, marque o ponto E, pé da perpendicular ao raio OD passando por C, e denote $z = \overline{EC}$ (veja a próxima figura). Os triângulos retângulos CDO e EDC são semelhantes pelo caso AA, uma vez que $O\widehat{C}D = C\widehat{E}D = 90^\circ$ e $O\widehat{D}C = C\widehat{D}E$. Logo, $\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ ou, o que é o mesmo,

$$\frac{z}{h} = \frac{h}{R}.$$



A partir daí, obtemos

$$\begin{aligned} z &= \frac{h^2}{R} = \frac{xy}{\frac{x+y}{2}} = \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} \\ &= \frac{2}{\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy}} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}. \end{aligned}$$

Desse modo, z é a média harmônica de x e y.

Como z é um dos catetos e h é a hipotenusa do triângulo ECD, temos que $h > z$, ou seja,

$$\sqrt{xy} > \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Quando $x = y$, não é possível a construção do triângulo ECD. No entanto, nesse caso é imediato verificar que a média harmônica é igual à media geométrica.

2 A desigualdade de Bernoulli

Continuando nossa discussão sobre desigualdades, apresentaremos agora a *desigualdade de Bernoulli*, juntamente com algumas de suas aplicações. Iniciamos discutindo um caso particular da desigualdade de Bernoulli, cuja demonstração utiliza o teorema do Binômio de Newton.

Proposição 1. *Sejam $x \geq 0$ um número real e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Prova. Pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot x^i \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \\ &= 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n. \end{aligned}$$

Mas, como $x \geq 0$, temos que

$$\binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \geq 0.$$

Então,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$
$$\geq 1 + nx.$$

Observe que se $n \geq 2$ e $x > 0$, temos

$$\binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n > 0,$$

de sorte que a desigualdade é estrita, ou seja, $(1+x)^n > 1 + nx$. □

Exemplo 2. *Se Joana toma um empréstimo de C reais sob o regime de juros simples, a uma taxa mensal i, ao fim de n meses ela terá uma dívida de $C \cdot (1 + ni)$ reais.*

Entretanto, se o regime considerado for o de juros compostos, a dívida após 1 mês será de $C \cdot (1 + i)$ reais, após 2 meses será de $C \cdot (1 + i)^2$ reais e assim por diante, até que, após n meses, a dívida será de $C \cdot (1 + i)^n$ reais.

O caso particular da desigualdade de Bernoulli discutido acima explica rigorosamente porque o regime de juros compostos gera uma dívida maior que o de juros simples. Realmente, temos que $(1+i)^n > 1+ni$, valendo a igualdade se, e somente se, $n = 1$ ou $i = 0$.

Agora, apresentaremos uma versão um pouco mais geral da desigualdade de Bernoulli, para cuja demonstração utilizaremos o *princípio de indução*.

Proposição 3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e x um número real tal que $x > -1$. Então*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Prova. Se $n = 1$, temos a igualdade $(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x$, logo, a desigualdade de Bernoulli é verdadeira neste caso.

Vamos admitir, como hipótese de indução, que a desigualdade é verdadeira para $n = k$, ou seja, que $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ para todo real $x > -1$. Mostremos que ela continua verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, que $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$, para todo real $x > -1$.

De fato, como $x > -1$, temos $x + 1 > 0$. Além disso, utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}(1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k \cdot (1 + x)\\ &\geq (1 + kx)(1 + x)\\ &= 1 + x + kx + kx^2\\ &\geq 1 + x + kx\\ &= 1 + (k + 1)x.\end{aligned}$$

□

Apesar de sua simplicidade, a desigualdade de Bernoulli nos permite dar algumas aplicações bem interessantes. No que segue, veremos algumas aplicações nesse sentido.

Exemplo 4. *Qual é o maior dentre os números $2^{100} + 3^{100}$ e 4^{80}?*

Solução. Inicialmente, note que

$$2^{100} + 3^{100} < 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100}.$$

Se mostrarmos que $4^{80} > 2 \cdot 3^{100}$, teremos

$$4^{80} > 2 \cdot 3^{100} > 2^{100} + 3^{100}.$$

O que falta é equivalente a mostrar que $\frac{4^{80}}{3^{100}} > 2$. Para tanto, como

$$\frac{4^{80}}{3^{100}} = \left(\frac{4^4}{3^5}\right)^{20} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20},$$

temos de mostrar que $\left(\frac{256}{243}\right)^{20} > 2$. Para tal fim, utilizemos a desigualdade de Bernoulli:

$$\begin{aligned}\left(\frac{256}{243}\right)^{20} &= \left(\frac{243 + 13}{243}\right)^{20}\\ &= \left(1 + \frac{13}{243}\right)^{20}\\ &\geq 1 + 20 \cdot \frac{13}{243}\\ &= 1 + \frac{260}{243}\\ &> 1 + 1\\ &= 2.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Mostre que a sequência*

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$$

em que o $n-$ésimo termo é dado por

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n + 1)^n}{n^n},$$

é crescente.

Solução. Devemos mostrar que $a_{n+1} > a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ou, ainda, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Para tal fim, comecemos escrevendo

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}\\ &= \frac{(n + 2)^{n+1}}{(n + 1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n + 1)^n}\\ &= \frac{n^n \cdot (n + 2)^{n+1}}{(n + 1)^{2n+1}}\\ &= \frac{n + 2}{n + 1} \cdot \left(\frac{n(n + 2)}{(n + 1)^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Nesse ponto, observando que $n(n+2)$ é quase igual a $(n+1)^2$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n\\ &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n\\ &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $(n+1)^2 > 1$, temos $-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$. Logo, utilizando a desigualdade de Bernoulli, concluímos que

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\\ &\geq \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\\ &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\\ &= \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}\\ &= \frac{n^3+3n^3+3n+2}{n^3+3n^3+3n+1}\\ &> 1,\end{aligned}$$

conforme desejado. $\square$

Observação 6. *A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é muito importante para a apresentação dos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral. De fato, é possível mostrar que, à medida que n cresce, os números a_n aproximam-se cada vez mais do número $e \cong 2,71828$, base dos logaritmos naturais. Percebendo que $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, costumamos sintetizar a informação acima escrevendo*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n} e.$$

A seguir, apresentamos mais uma versão da desigualdade de Bernoulli, agora supondo que o expoente é um número racional entre 0 e 1. A demonstração será uma bela aplicação da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Proposição 7. *Sejam $x \geq -1$ um número real e $0 < r < 1$ um número racional. Então,*

$$(1+x)^r \leq 1+rx.$$

Prova. Uma vez que r é um número racional e $0 < r < 1$, existem a e b inteiros positivos, tais que $r = \frac{a}{b}$ e $a < b$.

Agora, considere a sequência de números reais

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{b-a \text{ termos}}, \underbrace{1+x, 1+x, \ldots, 1+x}_{a \text{ termos}}.$$

Veja que a média aritmética dos números que formam essa sequência é igual a

$$\begin{aligned}\frac{(b-a)\cdot 1 + a\cdot(1+x)}{b} &= \frac{b-\cancel{a}+\cancel{a}+ax}{b}\\ &= 1+\frac{a}{b}\cdot x = 1+rx.\end{aligned}$$

Por outro lado, sua média geométrica vale

$$\begin{aligned}\sqrt[b]{1^{b-a}\cdot(1+x)^a} &= \sqrt[b]{(1+x)^a} = (1+x)^{\frac{a}{b}}\\ &= (1+x)^r.\end{aligned}$$

Então, utilizando a desigualdade entre médias, obtemos

$$(1+x)^r \leq 1+rx.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50 minutos para discutir todo o conteúdo reunido neste material.

É importante que o professor mostre cada uma das desigualdades apresentadas com todos os detalhes, sempre ressaltando o argumento utilizado. Em especial, é importante que os alunos percebam que o sinal da desigualdade de Bernoulli é invertido quando passamos de expoentes naturais para racionais entre 0 e 1. Recomendamos que sejam feitos alguns exemplos numéricos para ilustrar esse caso.

No exemplo 5, antes de provar que a sequência é crescente, encontre a representação decimal dos 4 primeiros termos da sequência, para que os alunos se sintam motivados a mostrar que ele é crescente.

As referências colecionadas a seguir trazem muito mais sobre desigualdades. A referência [2] explica o papel do número e no Cálculo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

3. Paulo Cezar Carvalho e Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro, SBM, 2015.