Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

A Linguagem dos Teoremas - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

12 de abril de 2019

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

Neste material, apresentamos os conceitos fundamentais da Lógica Proposicional de maneira formal. Iniciamos com a seguinte definição.

Definição 1. *Uma **proposição** é qualquer afirmação que pode ser julgada como verdadeira ou falsa de maneira exclusiva, mesmo que a sua veracidade ou a sua falsidade sejam impossíveis de serem verificadas.*

Por exemplo, as frases *"O corpo humano é composto por água"* ou *"O Sol gira ao redor da Terra"* são afirmações que podem ser julgadas como verdadeiras ou falsas. Além disso, a Ciência já foi capaz de comprová-las como verdadeira e falsa, respectivamente. Observe que a frase *"Existe vida em outros planetas"* também pode ser considerada uma proposição, apesar de não ter sido comprovada ou refutada. Por outro lado, as frases *"Feliz aniversário!"*, *"Qual é o seu nome?"* ou *"Esta frase é falsa"* não podem ser julgadas como verdadeiras ou falsas. Desta forma, não são consideradas como proposições.

Como dissemos acima, toda proposição pode ser apenas verdadeira ou falsa. Dessa forma, há um valor sempre binário que se atribui a cada proposição, seu chamado **valor-verdade**, que pode ser **verdadeiro** (**V**) ou **falso** (**F**), nunca uma terceira opção. Chamamos tal propriedade de **Princípio do Terceiro Excluído**[1] que, junto com o Princípio de Identidade (que afirma que todo ser é idêntico a si mesmo) e o de Não Contradição (que afirma que nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa simultaneamente), formam os pilares da Lógica Clássica de Aristóteles.

De agora em diante, utilizaremos letras $p, q, r, v, ...$ para representar proposições. Dessa forma, desenvolveremos uma teoria na qual os significados das proposições não são levados em consideração; apenas seus valores lógicos, que poderá ser apenas verdadeiro ou falso, importarão.

Além das proposições, um argumento também consiste de **conectivos** que são as estruturas responsáveis por combinar uma ou mais proposições para produzir uma nova proposição mais complexa. Por exemplo, considere as proposições:

p : O céu é azul.
q : O mar é vermelho.
r : O céu é azul e o mar é vermelho.

Observe que a proposição r é, na verdade, uma combinação das proposições p e q na qual foi utilizado o conectivo "*e*". Dessa forma, é de se esperar que o valor lógico da proposição r dependa de alguma forma dos valores lógicos das proposições p e q.

[1]Tal princípio também é sintetizado na forma de adágio latino, muito usado em narrativas, *Tertium non datur.*

A seguir, apresentaremos os principais conectivos, juntamente com as regras estabelecidas para seus respectivos usos.

I. Negação ($\neg$): o conectivo de negação é representado pelo símbolo ($\neg$) e tem a função mudar o significado de uma proposição para o significado oposto. Por exemplo, dada a proposição p : "*Eu sei dirigir*", a proposição $\neg p$ será "*Eu não sei dirigir*".

Observe que as proposições p e $\neg p$ sempre possuem valores lógicos diferentes. Isto é, quando p é verdadeiro, $\neg p$ é falso e vice-versa. Esta propriedade pode ser resumida na seguinte tabela-verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

II. Os conectivos de conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$): uma das formas mais comuns de combinar duas proposições p e q é através dos conectivos $\wedge$ e $\vee$. Enquanto o primeiro representa o sentido de complementaridade, o segundo representa o sentido de simultaneidade. Dessa forma, para que a frase "*O céu é azul ou o mar é vermelho*" seja verdadeira, basta que uma das frases: "*O céu é azul*" ou "*O mar é vermelho*" seja verdadeira. Por outro lado, para que a frase "*O céu é azul e o mar é vermelho*" seja verdadeira, é necessário que as duas frases: "*O céu é azul*" e "*O mar é vermelho*" sejam verdadeiras. Estas propriedades são resumidas na seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

A tabela acima foi construída da seguinte forma: primeiramente construímos quatro colunas, uma para cada uma das proposições que serão analisadas (p, q, $p \vee q$ e $p \wedge q$). Agora, uma vez que cada uma das proposições p e q assume dois valores possíveis, temos que o par (p, q) pode assumir quatro valores distintos, que são (V, V), (V, F), (F, V) e (F, F). Dessa forma, necessitamos de quatro linhas para descrever todas essas possibilidades e, para cada uma delas, descrevemos os valores lógicos de $p \vee q$ e de $p \wedge q$.

III. Disjunção mutuamente exclusiva ($\veebar$): quando criamos a proposição composta "*ou o céu é azul ou o mar é vermelho*" queremos transmitir a ideia de que exatamente uma das proposições simples "*o céu é azul*" ou "*o mar é vermelho*" é verdadeira. Neste caso, se ambas proposições simples forem verdadeiras, a proposição composta será falsa. Representamos essa ideia utilizando o símbolo $\veebar$, o qual tem a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

IV. Conectivo condicional ($\rightarrow$): quando formulamos uma proposição que transmite uma ideia de causa e efeito utilizamos o conectivo condicional de implicação ($\rightarrow$). Um exemplo de frase que possui este sentido é "*Se você se for, então irei chorar*". De maneira simbólica, representamos esta frase da seguinte forma $p \rightarrow q$, em que p : "*Você for embora*" e q : "*Eu irei chorar*". A função deste conectivo é descrita pela tabela a seguir:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Em geral, as pessoas não têm problemas em aceitar as duas primeiras linhas da regra do conectivo condicional. Por outro lado, as duas últimas são motivo de discordâncias.

Para esclarecer este ponto, considere um aluno que fez a seguinte promessa: "*Se eu passar no vestibular, então estudarei todos os dias*". Agora considere as quatro situações possíveis:

- **Situação 1.** O aluno passou no vestibular e, depois, estudou todos os dias.
- **Situação 2.** O aluno passou no vestibular, mas, depois, não estudou todos os dias.
- **Situação 3.** O aluno não passou no vestibular, mas, depois, estudou todos os dias.
- **Situação 4.** O aluno não passou no vestibular e, depois, não estudou todos os dias.

Não há dúvidas de que o aluno cumpriu sua promessa no primeiro caso, mas não a cumpriu no segundo caso. Observe também que não podemos dizer que o aluno falhou em cumprir sua promessa nos últimos dois casos, uma vez que ela estava condicionada ao fato dele passar no vestibular; assim, não importa mais se ele estudou ou não todos os dias subsequentes.

O próximo exemplo é uma adaptação de um experimento proposto por Wason e que buscava entender se as pessoas sabiam usar intuitivamente a Lógica Clássica. Para maiores informações visite o site: `http://en.wikipedia.org/wiki/Wason_selection_task`

Exemplo 2. *As cinco cartas* 2*,* 3*, M, A, E estão sobre uma mesa, e cada uma tem um número numa face e uma letra na outra. Simone deve decidir se a seguinte frase é verdadeira: "Se uma carta tem uma vogal numa face, então ela tem um número par na outra."Qual o menor número de cartas que ela precisa virar para decidir corretamente?*

2 3 M A E

Solução. É claro que devemos devemos virar as cartas A e E, que são vogais. De fato, se do outro lado delas houver um número ímpar, a proposição será falsa. Veja que não precisamos virar a carta M (que é uma consoante), pois, independentemente do número que exista do outro lado, a proposição de Simone nunca será invalidada. Devemos virar a carta com o número 3, pois se tivermos uma vogal do outro lado, a proposição será falsa. Veja, por fim, que não é necessário virar a carta com o número 2. Independentemente da letra do outro lado, a frase não poderá ser invalidada. Portanto, devemos virar as cartas $3, A, E$.

Dada a condicional $p \rightarrow q$, podemos definir as três proposições condicionais notáveis seguintes, as quais estão associadas à condicional original:

Contrapositiva: $\neg q \rightarrow \neg p$.
Recíproca: $q \rightarrow p$.
Inversa: $\neg p \rightarrow \neg q$.

Para entendê-las, considere a proposição condicional: "*Se está chovendo, abro o guarda-chuva*". A contrapositiva pode ser escrita como "*Se não abro o guarda-chuva, então não está chovendo*", a recíproca pode ser escrita como "*Se abro o guarda-chuva, então está chovendo*" e a inversa como "*Se não está chovendo, não abro o guarda-chuva*".

Outras noções importantes que devemos comentar neste ponto da teoria são as chamadas **condições necessárias** e **condições suficientes**. Quando a proposição composta $p \rightarrow q$ é verdadeira, dizemos que:

- p é uma condição suficiente para q.
- q é uma condição necessária para p.

V. Proposição bicondicional (se e somente se): Dadas duas proposições p e q, a proposição $p \leftrightarrow q$ indica qual é a *relação de equivalência* entre p e q no seguinte sentido: $p \leftrightarrow q$ será verdadeira se p e q forem ambas verdadeiras ou ambas falsas; e será falsa caso contrário.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Em linguagem comum, o símbolo $\leftrightarrow$ é a representação da expressão "*se e somente se*". Assim, a proposição "*Vou ao cinema se e somente se não estiver chovendo*" pode ser escrita como $p \leftrightarrow q$, onde $p =$"*vou ao cinema*" e $q =$"*estiver chovendo*".

VI. Evitando ambiguidades (o uso dos parênteses): combinando proposições e conectivos diversas vezes, podemos construir proposições mais sofisticadas, as quais chamaremos de **proposições compostas** ou **fórmulas**. Por exemplo, a afirmação "*Se chover, então estarei feliz e irei trabalhar*" pode ser escrita de forma simbólica da seguinte forma: $p \to (q \wedge r)$. Neste caso, o uso dos parênteses é fundamental para não confundirmos com a proposição em questão com a proposição $(p \to q) \wedge r$, que pode ser entendida como: "*Irei trabalhar e se chover, ficarei feliz*". Dessa forma, os parênteses servem para estabelecer uma ordem de prioridade na intepretação de uma proposição composta, assim como acontece quando lidamos com expressões algébricas.

Em outros casos, o uso dos parênteses não é necessário. Isso ocorre pois existe uma ordem de prioridade pré-estabelecida nos conectivos:

Prioridade alta: $\neg$
Prioridade intermediária: $\wedge$ e $\vee$
Prioridade baixa: $\to$ e $\leftrightarrow$.

Assim, $p \to q \vee \neg r$ deve ser entendido sem ambiguidades como $p \to (q \vee (\neg r))$. Porém, a proposição $p \vee q \wedge r$ não pode ser vista sem ambiguidade, pois nela podemos encontrar dois conectivos de mesma ordem de prioridade; em casos como esse, devemos sempre utilizar os parênteses para obter uma proposição bem definida.

De agora em diante, utilizaremos letras maiúsculas $(P, Q, R, ...)$ para denotar proposições compostas.

2 Problemas

Exemplo 3. *Escreva as seguintes proposições em formato simbólico.*

(a) Roberto é flamengista ou Ronaldo não é vascaíno.

(b) O cachorro late se e somente se o gato mia.

(c) Gosto de me divertir, mas também gosto de estudar.

(d) Se a grama é verde e o céu é azul, então a noite é escura.

Solução.

(a) $p \vee \neg q$.

(b) $p \leftrightarrow q$.

(c) $p \wedge q$.

(d) $(p \wedge q) \to r$.

(Em cada caso, certifique-se de que compreendeu quem são as proposições p, q, r.) □

Exemplo 4. *Escreva proposições em Português que possam ser representadas pelas fórmulas a seguir:*

(a) $p \vee (\neg q \wedge r)$.

(b) $p \to (q \vee r)$.

(c) $p \leftrightarrow (q \wedge r)$.

Solução.

(a) Sou vascaíno ou não sou flamenguista e brasileiro.

(b) Se chover amanhã, então irei ao shopping ou ficarei em casa.

(c) Você será aprovado se e somente se tirar boas notas e comparecer às aulas.

□

Exemplo 5. *Considerando-se a proposição* p : *"se Rui é um bom poeta, então Jorge é Atleta", é correto afirmar que:*

(a) a contrapositiva de p *é: "Se Rui não é um bom poeta, então Jorge não é um bom atleta!"*

(b) a contrapositiva de p *é: "Se Jorge não é atleta, então Rui não é um bom poeta".*

(c) a contrapositiva de p *é: "Se Jorge é atleta, então Rui é bom atleta".*

(d) a recíproca de p *é: "Se Rui não é um bom atleta, então Jorge não é atleta".*

(e) a recíproca de p *é: "Se Jorge não é atleta, então Rui não é um bom atleta".*

Solução. Sabemos que a recíproca de uma proposição $p \to q$ é dada por $q \to q$. Assim, a recíproca de "Se Rui é um bom poeta, então Jorge é Atleta" é "Se Jorge é atleta, então Rui é um bom poeta". Além disso, a contrapositiva de $p \to q$ é dada por $\neg q \to \neg q$. Logo, a contrapositiva de "Se Rui é um bom poeta, então Jorge é Atleta" é "Se Jorge não é atleta, então Rui não é um bom poeta". Portanto, o item correto é (b). □

3 Sugestões ao Professor

Uma boa forma de ensinar sobre os conectivos lógicos na prática é utilizando alguma linguagem de programação para resolver problemas básicos. Recomendamos a utilização da linguagem Python para este propósito. No site da Olimpíada Brasileira de Informática (OBI) você poderá encontrar uma série de problemas que devem ser resolvidos através da construção de algoritmos.

Outra atividade interessante para se fazer em sala é reproduzir o experimento de Wason com a turma. Anote os resultados e depois peça que seus alunos repitam o processo em casa.

Referências

[1] Joop Van Dormolen and Orit Zaslavsky. The many facets of a definition: The case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1):91–106, 2003.

[2] Shlomo Vinner. *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*, chapter 5, pages 65–81. Springer Netherlands, Dordrecht, 1991.