Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 1

Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano - parte 2

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Divisão de um segmento em uma razão dada

Um **segmento de reta** AB é o conjunto dos pontos da reta que passa por A e B, situados entre os pontos A e B, inclusive.

A **medida** ou **comprimento** do segmento AB é um número real não negativo, que denotamos por $\overline{AB}$. Se as coordenadas de A e B são (x_A, y_A) e (x_B, y_B), respectivamente, vimos na primeira parte dessa aula que

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Um **segmento orientado** é um segmento contido em uma reta orientada (veja também a parte 1). Nesse caso, além de possuir um comprimento, o segmento possui também um sinal, que indica se o segmento tem o mesmo sentido que a da reta orientada, ou tem sentido contrário.

Se, de acordo com a orientação da reta r, o ponto A está à esquerda do ponto B, denotamos $AB = \overline{AB}$ e $BA = -\overline{AB}$.

Dessa forma, temos

$$BA = -AB.$$

Dados três pontos A, B e C em uma reta orientada, temos a seguinte igualdade, chamada *fórmula de Chasles*[1]:

$$AB + BC = AC, \tag{1}$$

onde AB, BC e AC são segmentos orientados.

O significado da igualdade (1) depende da posição relativa dos pontos A, B e C. A figura abaixo exibe quatro possíveis situações.

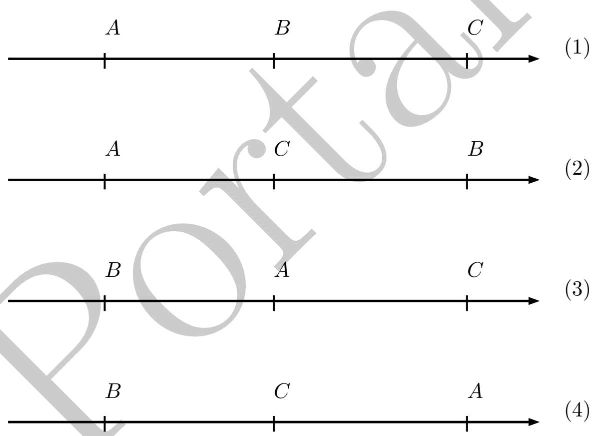

Figura 1: quatro situações em que $AB + BC = AC$.

[1]Michel Chasles (1793-1880), matemático francês.

Na situação (1), temos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Na situação (2), temos $AB = \overline{AB}$, $AC = \overline{AC}$ e $BC = -\overline{BC}$. Logo, $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{BC}$, ou seja, $AB + BC = AC$.

Na situação (3), $AB = -\overline{AB}, BC = \overline{BC}$ e $AC = \overline{AC}$. Logo, $\overline{AC} = -\overline{AB} + \overline{BC}$ e, novamente, $AB + BC = AC$.

Na situação (4), $AB = -\overline{AB}, BC = \overline{BC}$ e $AC = -\overline{AC}$. Logo, $-\overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{AC}$ e, uma vez mais, $AB + BC = AC$.

Deixamos ao leitor a descrição e análise das outras duas situações, as quais podem ser tratadas de modo similar ao feito acima pras situações (1) a (4).

Seja AB um segmento orientado no plano cartesiano, com extremidades $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, com $A \neq B$.

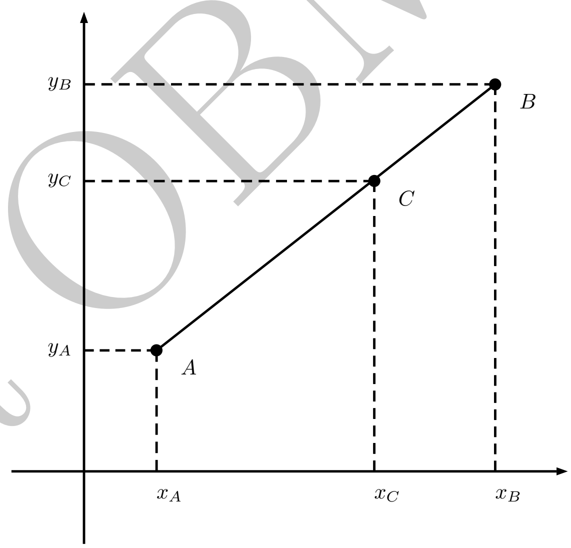

Figura 2: o ponto C sobre o segmento AB.

Dado um número real $\lambda \neq -1$, dizemos que um ponto $C \neq B$, situado sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, **divide o segmento orientado AB na razão λ** se

$$\lambda = \frac{AC}{CB} \tag{2}$$

É imediato verificar que o sinal de λ tem a seguinte interpretação geométrica:

$$\boxed{\lambda > 0 \text{ se, e somente se, } C \text{ está entre } A \text{ e } B.}$$

De fato, qualquer que seja a orientação dada à reta que passa pelos pontos A, B e C, se C estiver entre A e B, então AC e CB terão o mesmo sinal, logo, $\lambda = \frac{AC}{CB} > 0$.

Por outro lado, se C não estiver entre A e B, então ou B estará entre A e C, ou A estará entre B e C (veja os casos (1) e (3) da figura 1). Em um qualquer desses casos, AC e CB terão sinais contrários, logo, $\lambda = \frac{AC}{CB} < 0$.

Exigimos que o ponto C seja diferente de B, pois, se $C = B$, temos $CB = 0$ e, nesse caso, λ não estaria definido.

Também exigimos que $\lambda \neq -1$, pois -1 nunca pode ser valor da razão $\frac{AC}{CB}$. Realmente, se $\frac{AC}{CB} = -1$, então $AC = -CB$, ou seja, $AC + CB = 0$; daí, pela fórmula de Chasles (1) teríamos $AB = AC + CB = 0$, o que não ocorre porque $A \neq B$.

Dizemos que C é o **ponto médio** do segmento AB se $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Exemplos 1.

(1) *Se* $\lambda = 1$, *então* C *está entre* A *e* B *e* $\frac{AC}{CB} = 1$, *ou seja,* $\overline{AC} = \overline{CB}$. *Logo,* C *é ponto médio de* AB.

(2) *Se* $\lambda = -2$, *então* B *é o ponto médio de* AC.

(3) *Se* $\lambda = -\frac{1}{2}$, *então* A *é o ponto médio de* BC.

(4) $\lambda = 0$ *se, e somente se,* $C = A$.

Vamos, agora, calcular as coordenadas x_C e y_C do ponto C que divide o segmento AB em uma razão dada $\lambda \notin \{0, 1\}$ (veja a figura 2).

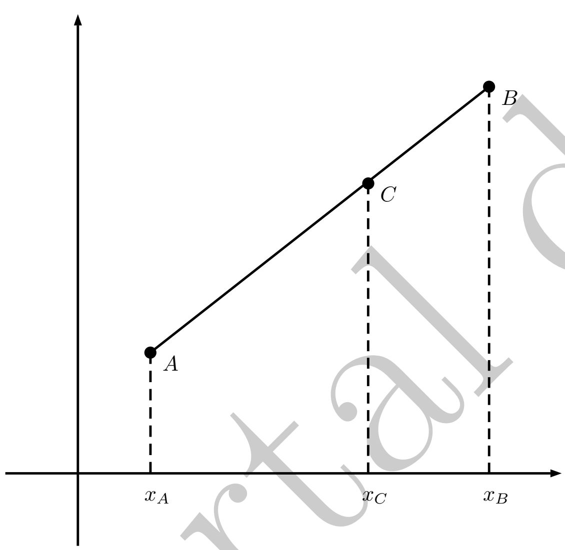

Figura 3: o teorema de Tales para o eixo x.

Para tanto, utilizaremos o teorema de Tales, aplicado primeiro às retas verticais que passam por A, B e C (veja a figura 3):

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{x_A - x_C}{x_C - x_B}.$$

Dessa igualdade, obtemos

$$\lambda x_C - \lambda x_B = x_A - x_C$$

e, então

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

De modo análogo, podemos aplicar o teorema de Tales às retas horizontais que passam pelos pontos A, B e C (veja a figura 4), obtendo

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{y_A - y_C}{y_C - y_B}.$$

Como anteriormente, segue dessa igualdade que

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}. \tag{4}$$

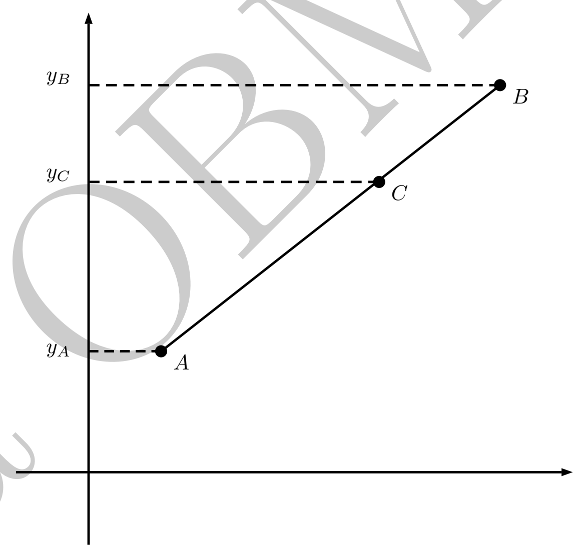

Figura 4: o teorema de Tales para o eixo y.

Em particular, fazendo $\lambda = 1$ encontramos as coordenadas do ponto médio M do segmento AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

2 Centro de massa de um conjunto finito de pontos materiais

A seguir, usaremos uma noção básica da Mecânica, qual seja, a de *ponto material*, que vem a ser um corpo cujas dimensões podem ser desprezadas em relação ao fenômeno em estudo. Do ponto de vista da Geometria, um **ponto material** é um ponto P ao qual associa-se um número real positivo m, que chamaremos de **massa** de P.

Consideremos um conjunto finito M de *pontos materiais* $P_1, \ldots, P_k$, com massas $m_1, \ldots, m_k$, respectivamente. O **centro de massa** do conjunto M é o ponto G do plano que, uma vez considerado como ponto material com massa

$m_1+\cdots+m_k$, pode substituir o conjunto M. Isso significa que uma força que aja sobre o conjunto M como um todo pode ser considerada como uma força aplicada no ponto material G com a massa total do conjunto, $m_1+\cdots+m_k$, associada a ele.

No caso em que $k=2$, ou seja, em que temos dois pontos materiais, vamos assumir o seguinte fato:

> O centro de massa H de um conjunto formado por dois pontos materiais P_1 e P_2 com massas m_1 e m_2, respectivamente, é um ponto G situado sobre o segmento P_1P_2 e dividindo-o na razão $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$.

A observação acima nos permite substituir, em um conjunto de pontos materiais, dois de seus pontos pelo seu centro de massa, associando a esse centro de massa a soma das massas dos pontos a serem substituídos. Fazendo isso um número finito de vezes, podemos encontrar o centro de massa de qualquer conjunto finito de pontos materiais.

Substituindo o valor $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ em (3) e em (4), e assumindo que as coordenadas de P_1 e P_2 são (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente, obtemos as coordenadas do centro de massa H do conjunto formado pelos pontos materiais P_1 e P_2:

$$x_H = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \quad \text{e} \quad y_H = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}. \tag{5}$$

Exemplos 2.

(1) *Se $m_1 = m_2 = m$, então $\lambda = 1$ e, portanto, o centro de massa do conjunto é o ponto médio do segmento P_1P_2, com massa $2m$.*

(2) *Se uma das massas é o dobro da outra, por exemplo, se $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$, então $\lambda = 2$ e o ponto G, centro de massa do conjunto, é tal que $\frac{P_1G}{GP_2} = 2$. Por sua vez, isso implica*

$$P_1G = 2GP_2.$$

No que segue, aplicaremos a discussão acima ao estudo da geometria de triângulos. Para tanto, precisamos da definição a seguir.

Definição 3. *Em um triângulo ABC, a* **mediana** *relativa ao lado AB é o segmento de reta que liga o vértice C ao ponto médio M do lado AB.*

Suponhamos que três massas iguais a m são associadas aos vértices A, B e C de um triângulo, de modo que esses vértices tornem-se pontos materiais. Queremos encontrar o centro de massa G desse conjunto de três pontos materiais (veja a figura 5).

De acordo com a discussão anterior, podemos substituir os pontos A e B pelo ponto médio M, com massa $2m$, de modo que o centro de massa do conjunto de pontos materiais A, B e C, cada um com massa m, coincida com o centro de massa do conjunto formado pelos pontos C, com massa m, e M, com massa $2m$.

Em particular, o item (2) do Exemplo 2 garante que o centro de massa G pertence à mediana CM e divide essa mediana na razão $\lambda = \frac{2m}{m} = 2$. Isso significa que $\frac{CG}{GM} = 2$, ou seja, $CG = 2GM$.

Da mesma forma, é possível substituir os pontos materiais B e C pelo ponto médio N, com massa $2m$. Logo, o ponto G também pertence à mediana AN e a divide na razão $\lambda = 2$. Repetindo esse argumento para os pontos A e C, concluímos que o ponto G pertence ainda à mediana relativa ao lado AC. Isso mostra que as três medianas de um triângulo encontram-se em um só ponto, chamado de **baricentro** do triângulo ABC, e que o baricentro coincide com o centro de massa do conjunto de pontos materiais formado pelos vértices do triângulo, cada um com uma mesma massa associada a si.

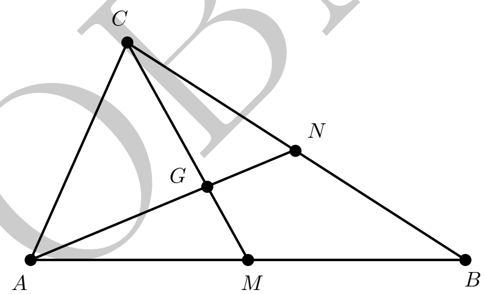

Figura 5: o baricentro do triângulo ABC.

Terminamos esta seção calculando as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC em função das coordenadas de seus vértices. Para tanto, sejam $(x_A, y_A), (x_B, y_B)$ e (x_C, y_C), respectivamente.

Primeiramente, calculamos as coordenadas do ponto médio M do lado AB (veja a figura 5):

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A+y_B}{2}. \tag{6}$$

Agora, para calcularmos as coordenadas de G, usamos as fórmulas (3) e (4), com $\lambda = 2$:

$$x_G = \frac{x_C + 2x_M}{1+2} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_C+2y_M}{1+2}.$$

Substituindo nas duas igualdades acima os valores de x_M e y_M, dados por (6), obtemos

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

3 Coordenadas baricêntricas

A seguir, exibiremos um sistema de coordenadas no interior de um triângulo, elaborado pelo matemático e astrônomo alemão August Ferdinand Möbius (1790-1868).

Na seção anterior, encontramos o baricentro de um triângulo fixando três massas iguais em seus vértices, tornando-os pontos materiais. Vamos, agora, admitir a possibilidade das massas associadas aos vértices não serem necessariamente iguais.

Mais precisamente, fixado um triângulo ABC, vamos agora considerar os vértices desse triângulo como pontos materiais com massas m_A, m_B e m_C.

Repetindo o que fizemos na seção anterior, obtemos os pontos P, Q e R que dividem os segmentos AB, BC e CA nas razões $\frac{m_B}{m_A}$, $\frac{m_C}{m_B}$ e $\frac{m_A}{m_C}$, respectivamente (veja a figura 6). Os segmentos CP, BR e AQ se intersectam-se em um ponto Z no interior do triângulo, cujas coordenadas cartesianas vamos calcular a seguir.

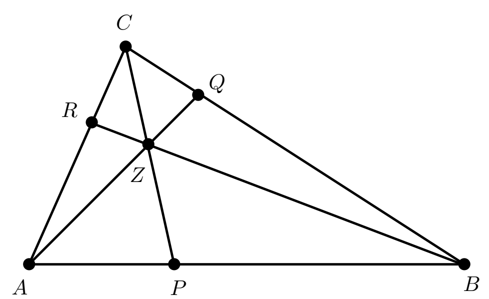

Figura 6: o ponto Z tem coordenadas baricêntricas $[m_A, m_B, m_C]$.

Utilizando as identidades (5), obtemos

$$x_P = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \quad \text{e} \quad y_P = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B};$$

logo,

$$x_Z = \frac{m_C x_C + m_P x_P}{m_C + m_P} \quad \text{e} \quad y_Z = \frac{m_C y_C + m_P y_P}{m_C + m_P},$$

onde $m_P = m_A + m_B$. Substituindo os valores de x_P e y_P nas expressões acima, obtemos

$$\begin{aligned} x_Z &= \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C}, \\ y_Z &= \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C}. \end{aligned} \tag{7}$$

Doravante, diremos que as massas m_A, m_B e m_C são as **coordenadas baricêntricas** do ponto Z, e indicaremos esse fato com a notação $Z = [m_A, m_B, m_C]$.

Para que as expressões em (7) fiquem mais simples, podemos estabelecer a restrição

$$m_A + m_B + m_C = 1.$$

Neste caso, as expressões em (7) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} x_Z &= m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C, \\ y_Z &= m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C. \end{aligned} \tag{8}$$

Fazendo $m_A = 1$, obtemos $m_B = m_C = 0$ e, de (8), $x_Z = x_A$ e $y_Z = y_A$; assim, $Z = A$. Portanto, podemos escrever o ponto A, em coordenadas baricêntricas, como $A = [1, 0, 0]$. Analogamente, $B = [0, 1, 0]$ e $C = [0, 0, 1]$. Quando as três massas nos vértices são iguais a m, obtemos o baricentro G do triângulo, que tem coordenadas baricêntricas $G = [1/3, 1/3, 1/3]$.

De modo análogo, podemos fazer a soma das massas ser igual a uma constante positiva a. O exemplo a seguir mostra uma situação em que uma escolha conveniente de a se impõe.

Exemplo 4. *Temos três recipientes, um com capacidade para 7 litros, outro com capacidade para 6 litros e o terceiro com capacidade para 3 litros. Os recipientes não têm marcações. O recipiente com capacidade para 7 litros está cheio de água, e há 1 litro de água no menor recipiente. Desejamos dividir esse total de 8 litros de água em duas partes de 4 litros cada, apenas derramando a água de um recipiente para outro. Explique como fazê-lo.*

Solução. Vamos interpretar a quantidade de água em cada recipiente como uma coordenada baricêntrica de um ponto no plano. Como o total de água nos três recipientes é 8 litros, vamos considerar coordenadas $[t_1, t_2, t_3]$ com $t_1 + t_2 + t_3 = 8$, sendo a coordenada t_1 a quantidade de água no recipiente de 7 litros, a coordenada t_2 a quantidade de água no recipiente de 6 litros e a coordenada t_3 a quantidade de água no recipiente de 3 litros.

A situação inicial corresponde a $t_1 = 7$, $t_2 = 0$ e $t_3 = 1$, ou seja, corresponde ao ponto $[7, 0, 1]$. Para dividir os 8 litros em duas partes iguais, devemos obter uma configuração que corresponda ao ponto $[4, 4, 0]$.

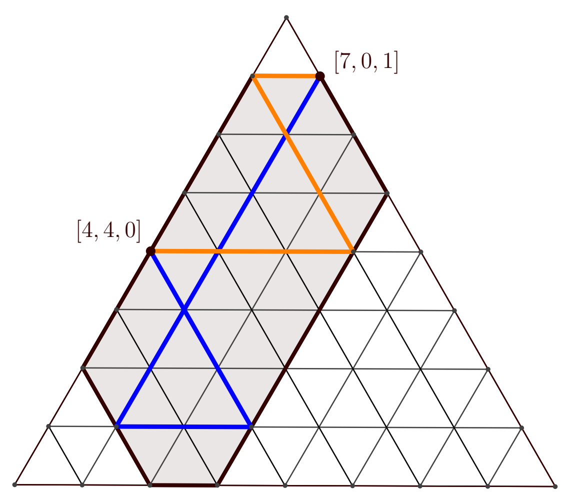

Figura 7: o problema dos três recipientes.

É fácil verificar que a região destacada no triângulo da figura 7 é formada pelos pontos que correspondem às situações possíveis com a quantidade de água dada e as limitações impostas pelos volumes dos três recipientes.

O processo de derramar água de um recipiente para outro pode ser interpretado geometricamente como um movimento do ponto correspondente. Assim, novamente na figura 7, vemos dois caminhos poligonais ligando o ponto $[7,0,1]$, correpondente à situação inicial, ao ponto $[4,4,0]$, correspondente à situação desejada.

O caminho poligonal azul corresponde à seguinte solução do problema:

$$[7,0,1] \to [1,6,1] \to [1,4,3] \to [4,4,0].$$

O caminho poligonal laranja corresponde à seguinte solução do problema:

$$[7,0,1] \to [7,1,0] \to [4,1,3] \to [4,4,0].$$

□

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Se você preferir, pode trabalhar apenas com a noção de medida de segmento, considerando somente razões λ que sejam positivas e forçando o ponto que divide o segmento AB na razão λ a estar entre A e B. Entretanto, sugiro fortemente que você acompanhe o texto e introduza cuidadosamente a noção de segmento orientado. Atenção: um segmento orientado *não* é um vetor, pois tem posição definida e fixada. Um vetor é um conjunto (na verdade, uma classe de equivalência) de segmentos orientados com mesmo comprimento, mesma direção e mesma orientação.

A noção de ponto material pode ser enfatizada com exemplos vindos da mecânica newtoniana. Isso enriquecerá sua aula e servirá como exemplo da profunda conexão entre Geometria e Mecânica. Caso prefira, ou não tenha tempo, você pode pular a dicussão sobre o baricentro, assumindo que as medianas de um triângulo se encontram em um ponto que as divide na razão $2:1$, a partir do vértice.

Você pode falar sobre o problema dos três recipientes antes de introduzir as coordenadas baricêntricas, tentando resolvê-lo diretamente, sem a interpretação geométrica. Depois, introduza as coordenadas e compare as duas soluções. Um desafio: mostre que, no exemplo 4, é possível medir qualquer quantidade inteira de litros de 1 a 8. Como esse resultado pode ser interpretado geometricamente?

Há uma quantidade razoável de referências sobre coordenadas baricêntricas disponíveis na rede mundial de computadores. Para um aprofundamento nesse assunto, você pode, por exemplo, consultar a sugestão de leitura complementar [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2: Geometria Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. de Figueiredo, J. O., *Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo*. Disponível em: http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2008.2/esp/2008-osorio-esp-uff.pdf