Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Algébrica

Soma, diferença e multiplicação de números complexos

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de abril de 2020

1 Introdução

Conforme prometido na aula passada, agora damos início ao estudo das propriedades algébricas dos números complexos. Ou seja, vamos aprender como realizar operações entre eles.

Quando considerarmos as operações de *adição, subtração e multiplicação*, veremos que os números complexos podem ser manipulados da mesma forma que se manipula números reais, apenas levando em conta o fato de que $i^2 = -1$. As propriedades usuais dessas operações, como a comutatividade, associatividade e distributividade continuam valendo. Na próxima aula, veremos também que a divisão de números complexos se comporta de maneira semelhante àquela de reais, mas requer alguns truques para que obtenhamos um resultado simplificado. Contudo, a potenciação de números complexos só obedece as mesmas regras dos números reais quando o expoente é um número inteiro. Por exemplo, os cálculos de raízes quadradas ou cúbicas, que equivalem, respectivamente, à elevaçao de um número aos expoentes $1/2$ e $1/3$ (não inteiros), respectivamente, devem ser tratado com bem mais cautela (e todo complexo não nulo possuirá duas raízes quadradas e três raízes cúbicas).

2 Adição e subtração

Lembre-se de que todo número complexo é composto de uma parte real e uma parte imaginária. A soma de dois complexos é obtida somando-se a parte real de um com a parte real do outro e, de forma independente, a parte imaginária de um com a do outro. Por exemplo, a soma de $3 + 5i$ com $1 + 4i$ é igual a $(3 + 1) + (5 + 4)i$, que pode ser simplificado para $4 + 9i$. De forma simples, podemos *reordenar as parcelas e colocar o "i" em evidência*:

$$\begin{aligned}(3 + 5i) + (1 + 4i) &= 3 + 1 + 5i + 4i\\ &= (3 + 1) + (5 + 4)i\\ &= 4 + 9i.\end{aligned}$$

A seguir, vemos alguns exemplos em que a parte real ou a parte imaginária é negativa.

Exemplo 1. *Calcule a soma dos números em cada item.*

(*a*) $3 - 5i$ *e* $2 + 9i$.

(*b*) $-5 + 7i$ *e* $-3 - 5i/2$.

(*c*) $\sqrt{2} + 3i$ *e* $1 + 2i$.

Solução.

(a) Veja que $3 - 5i$ é o mesmo que $3 + (-5)i$. Assim,

$$\begin{aligned}(3 - 5i) + (2 + 9i) &= 3 + 2 - 5i + 9i\\ &(3 + 2) + ((-5) + 9)i\\ &= 5 + 4i.\end{aligned}$$

(b) Aqui temos um exemplo em que a parte imaginária é um número racional não inteiro, mas isso não altera a execução da adição:

$$\begin{aligned}(-5 + 7i) + \left(-3 - \frac{5i}{2}\right) &= -5 - 3 + \left(7 - \frac{5}{2}\right)i\\ &= -8 + \left(\frac{14 - 5}{2}\right)i\\ &= -8 + 9i/2.\end{aligned}$$

(c) Agora, temos um exemplo em que a parte real não é racional; novamente, isso não altera a execução da adição:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + 3i) + (1 + 2i) &= (\sqrt{2} + 1) + (3 + 2)i\\ &= \sqrt{2} + 1 + 5i.\end{aligned}$$

Veja que o resultado deste item possui parte real $\sqrt{2}+1$ e parte imaginária 5; não há como simplificar ainda mais a expressão $\sqrt{2} + 1$.

□

De modo geral, se a,b,c,d são reais e $z = a+bi$ e $w = c+di$ são dois números complexos então:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

A subtração é feita pelo mesmo princípio. Para z e w como acima temos:

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Exemplo 2. *Calcule a diferença entre os dois números complexos de cada item, fazendo sempre o primeiro menos o segundo:*

(*a*) $-3 - 2i$ *e* $7 - 4i$.

(*b*) $5 + \sqrt{2}i$ *e* $-5 + \sqrt{2}i$.

Solução.

(a) Temos que

$$\begin{aligned}(-3 - 2i) - (7 - 4i) &= -3 - 2i - 7 + 4i\\ &= -3 - 7 + (4 - 2)i\\ &= -10 + 2i.\end{aligned}$$

(b) Temos que

$$\begin{aligned}(5 + i\sqrt{2}) - (-5 + i\sqrt{2}) &= 5 + i\sqrt{2} + 5 - i\sqrt{2}\\ &= 10 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})i\\ &= 10 + 0\, i\\ &= 10.\end{aligned}$$

□

Observação 3. *Veja que $bi = ib$, para todo b, apesar de que é muito mais comum escrever $a+bi$ do que $a+ib$. Por outro lado, no exemplo acima, em que $b = \sqrt{2}$, é menos confuso escrever $i\sqrt{2}$ do que $\sqrt{2}\,i$ para deixar claro que estamos tomando a raiz quadrada apenas do número 2. Veja que*

$$i\sqrt{2} = \sqrt{2}\,i \neq \sqrt{2i} = \sqrt{i2}.$$

3 Multiplicação

Para a multiplicação, basta que o leitor lembre-se da propriedade distributiva da multiplicação pela adição (e pela subtração), que continua valendo no conjunto dos números complexos.[1] Se x, y e z são complexos quaisquer, a distributividade nos diz que:

$$z\,(x + y) = \overset{(1)}{zx} + \overset{(2)}{zy}.$$

Aplicando a distributividade mais de uma vez, também podemos concluir que, para quatro números complexos, x, y, z e w, vale:

$$(z + w)(x + y) = \overset{(1)}{zx} + \overset{(2)}{zy} + \overset{(3)}{wx} + \overset{(4)}{wy}.$$

Usando a distributividade juntamente com o fato de que $i^2 = -1$, podemos obter o produto dos números complexos $a + bi$ e $c + di$ como segue:

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bd(i^2)\\ &= ac + (ad+bc)i + (bd)(-1)\\ &= (ac-bd) + (ad+bc).\end{aligned}$$

Exemplo 4. *Em cada um dos item a seguir, calcule o produto dos dois números dados:*

(a) $2 + 3i$ *e* $4 + i$.

(b) $1 + 2i$ *e* $-3 - 5i$.

(c) 4 *e* $2 - 3i$.

Solução.

(a) Temos que

$$\begin{aligned}(2+3i)(4+i) &= 2(4+i) + 3i(4+i)\\ &= 8 + 2i + 12i + 3i^2\\ &= 8 + 2i + 12i - 3\\ &= (8-3) + (2+12)i\\ &= 5 + 14i.\end{aligned}$$

(b) Executando a distributividade "*de cabeça*", temos

$$\begin{aligned}(1+2i)(-3-5i) &= -3 - 5i - 6i - 10i^2\\ &= -3 - 5i - 6i + 10\\ &= 7 - 11i\end{aligned}$$

(c) Este caso é bastante simples:

$$4(2-3i) = 8 - 12i.$$

□

4 Potenciação com expoentes inteiros não negativos

Quando n é um número inteiro positivo e z é um número complexo, a potenciação z^n nada mais é do que o produto de n cópias de z:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ vezes}}.$$

Além disso, definimos $z^0 = 1$ para todo complexo $z \neq 0$. Sendo assim, a potenciação com expoentes em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ respeita as regras usuais de potenciação de números reais. Mais precisamente, se $z, w \in \mathbb{C}$ e n, m são inteiros não negativos.[2], as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$\begin{aligned}z^{n+m} &= z^n \cdot z^m,\\ (z \cdot w)^n &= z^n \cdot w^n\\ (z^n)^m &= z^{nm}.\end{aligned}$$

Expressões do tipo $(z+w)^2$ e $(z+w)^3$ podem ser calculadas usando produtos notáveis, da mesma forma que fazemos com números reais. (Cuidado! Também como com números reais, em geral temos $(z+w)^2 \neq z^2 + w^2$.)

Ao desenvolvermos produtos notáveis como esses envolvendo números complexos, um ponto que ajuda bastante é saber calcular rapidamente as *potências do número i*. Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned}i^0 &= 1,\\ i^1 &= i,\\ i^2 &= -1,\\ i^3 &= -i.\end{aligned}$$

As três primeiras igualdades acima são evidentes; a última pode ser obtida notando que $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$.

[1] Aqui, o intuito não é fazer uma apresentação formal dessas propriedades. Em cursos avançados é possível primeiro definir a multiplicação para depois justificar porque a propriedade distributiva vale. Assim, apenas assumimos que a distributividade vale para apresentar ao leitor como o cálculo deve ser realizado.

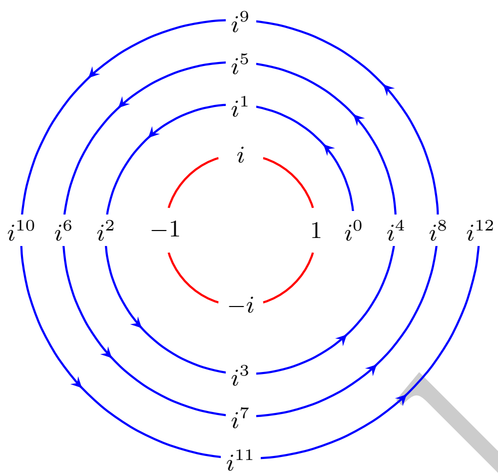
[2] Essas regras também valem quando n e m são negativos, desde que $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Mas, como $z^{-n} = 1/z^n$ e trataremos da divisão apenas na aula seguinte, por hora não utilizaremos expoentes negativos.

O que segue é bastante interessante. Vamos calcular as próximas quatro potências de i.

$$\begin{aligned} i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1, \\ i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i. \end{aligned}$$

Os números obtidos, $1, i, -1, -i$, nesta ordem, são os mesmos que obtivemos nas quatro potências iniciais de i. Este padrão continua a se repetir para todas as potências de i, como resumido na tabela e figura que seguem.

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	$\ldots$
$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	
1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	$\ldots$



De fato, uma vez que $i^4 = 1$, para qualquer inteiro positivo k, temos que $i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$. Ou seja, temos que i elevado a qualquer múltiplo de 4 é igual a 1. O caso geral é provado no exemplo a seguir.

Exemplo 5. *Para todo natural n, sendo r o resto da divisão de n por 4, vale que $i^n = i^r$.*

Solução. Sendo q o quociente da divisão de n por 4, podemos escrever $n = 4q + r$. Dessa forma, temos que:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r.$$

□

De posse das observações acima, podemos facilmente calcular potências de expoentes inteiros positivos de outros números complexos. Vejamos um

Exemplo 6. *Calcule os valores das partes real e imaginária dos números complexos $(3 + 4i)^2$ e $(2 + i)^3$.*

Solução. Para calcular o primeiro número, usaremos o produto notável $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$$\begin{aligned} (3 + 4i)^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4i + (4i)^2 \\ &= 9 + 24i + 16i^2 \\ &= 9 + 24i - 16 \\ &= -7 + 24i. \end{aligned}$$

Logo, sua parte real é -7 e sua parte imaginária é 24.

Para calcular o segundo número, usaremos o produto notável $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

$$\begin{aligned} (2 + i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i. \end{aligned}$$

Logo, sua parte real é 2 e sua parte imaginária é 11. □

Observação 7. *Na aula passada precisávamos calcular uma raiz cúbica do número $2+11i$ e uma do número $2-11i$. No Exemplo 6 mostramos, por sorte, que $(2+i)^3 = 2+11i$. Com isso, verificamos que $2 + i$ é uma das raízes desejadas, conforme já havíamos informado na aula anterior. O leitor também pode verificar que $(2-i)^3 = 2-11i$, de modo que $2 - i$ é uma das raízes cúbicas de $2 - 11i$.*

Essa observação ainda não responde à pergunta de como obter a raiz cúbica de um complexo qualquer. Isso ficará para aulas futuras, quando veremos que todo complexo não nulo possui três raízes cúbicas. No exemplo seguinte, começamos com um problema mais simples: calcular “raízes quadradas”.

Um ponto importante já observado é que, no conjunto dos reais, todo número real positivo r possui apenas uma raiz quadrada. Apesar de que sempre há duas soluções para a equação $x^2 = r$, temos que apenas a solução positiva é chamada de raiz quadrada de r. Por outro lado, os números complexos que não são reais não são considerados nem positivos nem negativos. Por exemplo, o número i não é nem maior nem menor do que zero (eles são *incomparáveis*). O mesmo vale para $-i$, que nem é negativo nem positivo.

Vimos que a equação $x^2 = -1$ possui como raiz tanto o número i quanto o número $-i$. Desse modo, o número i é *uma* raiz quadrada de -1 e não *a* raiz quadrada de -1. Por isso, a notação $\sqrt{-1}$ é ambígua e deve ser evitada, a menos que fique claro sobre qual raiz estamos interessados ou que a escolha precisa de uma das duas raízes seja irrelevante.

Dito isso, agora observamos que, no universo dos complexos, não apenas os reais negativos passam a ter raízes quadradas, mas também todo complexo não nulo possui exatamente duas raízes quadradas. Por exemplo, se uma raiz de -1 é igual a i, quem seriam as raízes quadradas de i?

Exemplo 8. *Calcule as raízes quadradas de i, ou seja, todos os complexos x tais que $x^2 = i$.*

Solução. Queremos resolver a equação $x^2 = i$, em que $x \in \mathbb{C}$. Fazendo $x = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, queremos encontrar todos tais a e b satisfazendo a igualdade

$$(a + bi)^2 = i.$$

Desenvolvendo primeiramente o lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned}(a + bi)^2 &= a^2 + 2abi + (bi)^2 \\ &= a^2 + 2abi + b^2 i^2 \\ &= (a^2 - b^2) + 2abi.\end{aligned}$$

Logo, queremos que $(a^2 - b^2) + 2abi = i$ ou, o que é o mesmo,

$$(a^2 - b^2) + (2ab - 1)i = 0$$

Para que o número complexo da esquerda seja zero, devemos ter que $a^2 - b^2 = 0$ e $2ab - 1 = 0$. Logo, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0, \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

A primeira equação pode ser escrita como $(a+b)(a-b) = 0$, o que implica $a + b = 0$ ou $a - b = 0$. Assim, devemos ter $b = -a$ ou $b = a$. Analisemos cada caso:

Se $b = -a$, a segunda equação do sistema nos dá $2a(-a) = 1$, logo, $a^2 = -1/2$. Mas isso é impossível, pois (apresar de que $x = a + bi$ está no universo dos complexos) o número a é um número real (logo, $a^2 \geq 0$).

Se $a = b$, a segunda equação do sistema se reduz a $2a^2 = 1$. Logo, $a^2 = \frac{1}{2}$, de onde

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad a = -\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Há, portanto, duas possibilidades para x:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

□

O exercício a seguir pode ser resolvido da mesma maneira.

Exemplo 9. *Calcule as raízes quadradas de $3 - 4i$.*

Solução. Queremos resolver a equação $z^2 = 3 - 4i$. Fazendo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i.$$

Pelos cálculos que fizemos no início da solução do exemplo anterior, isso é o mesmo que

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 3 - 4i.$$

Também como lá, para que os números complexos nos dois lados da igualdade anterior sejam iguais, eles devem possuir as mesmas partes real e imaginária. Com isso, devemos ter o sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4. \end{cases}$$

Da segunda equação, segue que $b = -2/a$. Substituindo esse valor na primeira equação obtemos:

$$a^2 - \left(\frac{-2}{a}\right)^2 = 3.$$

Reduzindo todas as parcelas a um mesmo denominador, vemos que a última equação equivale à equação biquadrada:

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0.$$

Fazendo, $x = a^2$, temos que resolver à equação de segundo grau: $x^2 - 3x - 4 = 0$. A soma das raízes dessa equação vale 3 e o produto vale -4. Logo, as únicas opções são $x = 4$ ou $x = -1$ (o que também pode ser obtido usando a fórmula de Bháskara). Assim, $a^2 = 4$ ou $a^2 = -1$. Entretanto, como a é um número real, eliminamos a possibilidade $a^2 = -1$. Segue que $a^2 = 4$ e temos duas possibilidades: $a = 2$ ou $a = -2$.

Por fim, se $a = 2$, temos $b = \frac{-2}{2} = -1$ e $z = a + bi = 2 - i$. Se, por outro lado, $a = -2$, então $b = \frac{-2}{-2} = 1$ e $z = -2 + i$.

Concluímos que as duas raízes quadradas de $3 - 4i$ são $2 - i$ e $-2 + i$. □

Exemplo 10. *Encontre um polinômio de segundo grau e coeficientes reais que admita $1 - 3i$ como uma de suas raízes.*

Solução. Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$ o polinômio desejado. Como $1 - 3i$ é uma de suas raízes, temos que

$$a(1 - 3i)^2 + (1 - 3i)b + c = 0.$$

Como $(1 - 3i)^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = -8 - 6i$, a igualdade acima é o mesmo que $a(-8 - 6i) + b(1 - 3i) + c = 0$, ou seja,

$$-8a + b + c - (6a + 3b)i = 0.$$

Para que este número seja igual a zero, é preciso que tanto sua parte real como sua parte imaginária valham zero. Logo,

$$\begin{cases} -8a + b + c = 0, \\ 6a + 3b = 0. \end{cases}$$

A segunda equação equivale a $3b = -6a$, ou seja, $b = -2a$. Substituindo essa expressão para b na primeira equação, temos que $-8a - 2a + c = 0$, logo, $c = 10a$. Escrevemos, assim, tanto b como c em função de a e obtemos que:

$$p(x) = ax^2 - 2ax + 10a.$$

Na verdade, para qualquer valor diferente de zero que escolhermos para a, obteremos as mesmas raízes para o polinômio $p(x)$. Assim, um dos polinômios que satisfaz o enunciado pode ser obtido escolhendo $a = 1$, ou seja, $p(x) = x^2 - 2x + 10$. $\square$

Exemplo 11. *Resolva a equação* $x^2+4x+5 = 0$ *no universo dos números complexos.*

Solução. O discriminante dessa equação de segundo grau é:

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Com isso, a fórmula de Bháskara dá:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2},$$

onde $\sqrt{-4}$ denota uma raiz quadrada de -4. Como uma possibilidade é $2i$ (pois $(2i)^2 = -4$), temos

$$x = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Observe que, se usássemos a possibilidade $-2i$ para $\sqrt{-4}$, obteríamos as mesmas raízes para a equação:

$$x = \frac{-4 \pm (-2i)}{2} = -2 \pm i.$$

$\square$

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 min. O objeto é apresentar como realizar operações básicas com os números complexos. Mais detalhes do que exploramos aqui podem ser obtidos nas referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`

3. Number, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.