Material Teórico - Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Inequações Quociente

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

27 de julho de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Inequações Quociente

Dadas funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se de inequação-quociente toda inequação de uma das seguintes formas:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0,\quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0,\quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0,\quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\quad \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Lembre-se de que, em uma fração, a parte de cima é chamada de numerador e a de baixo de denominador. Assim, nos exemplos acima, $g(x)$ representa o denominador. É importante saber que, em toda fração, o denominador precisa ser diferente de zero; caso contrário, a fração não terá sentido matemático. A fração $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ também pode ser escrita como $f(x)/g(x)$, mas quando $f(x)$ é uma expressão longa a forma que escrevemos primeiro costuma ser mais clara.

A resolução de inequações-quociente é muito semelhante à das inequações-produto, mas aqui devemos ter o cuidado adicional de que o denominador seja diferente zero. Ou seja, nas inequações acima precisamos ter $g(x) \neq 0$ para que x pertença ao conjunto solução, independentemente do sinal da inequação.

Exemplo 1. *Resolva a inequação*

$$\frac{2x+1}{x-2} \leq 0$$

no conjunto universo dos números reais.

Solução. Considere $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x-2$. Queremos que $f(x)/g(x)$ seja menor ou igual a zero. Vamos primeiro analisar quando as funções $f(x)$ e $g(x)$ são iguais a zero. Para que $f(x)$ seja zero, devemos ter

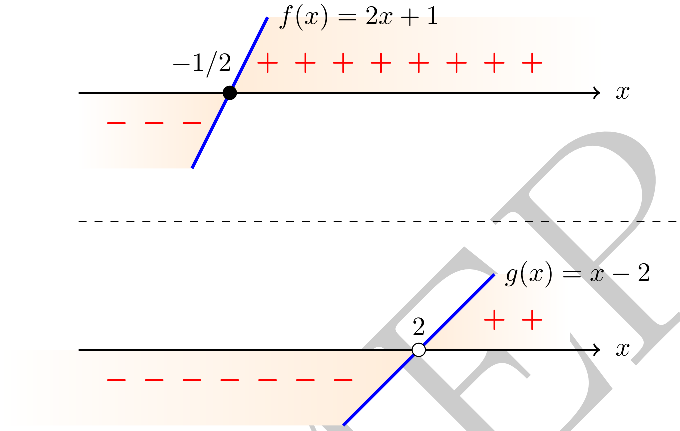
$$2x+1 = 0 \implies 2x = -1 \implies x = -1/2;$$

para que $g(x)$ seja zero, devemos ter

$$x - 2 = 0 \implies x = 2.$$

Dessa forma, para que o quociente $f(x)/g(x)$ seja zero, é necessário que $f(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ (lembrando que o denominador da fração não pode ser zero). Sendo assim, dentre os valores acima, apenas $x = -1/2$ satisfaz a inequação do enunciado.

Resta, ainda, descobrir quando $f(x)/g(x)$ é menor do que zero. Pela regra dos sinais, precisamos que $f(x)$ e $g(x)$ sejam não nulas e tenham sinais diferentes, ou seja, uma delas deve ser positiva e a outra negativa. Veja que ambas são funções lineares e o coeficiente de x em ambas é positivo (sendo igual a 2 e a 1, respectivamente, em $f(x)$ e $g(x)$). Logo ambas são funções crescentes. Seus gráficos seguem abaixo (por simplicidade, omitimos o eixo-y em cada um dos gráficos, mas sugerimos que você o desenhe, como exercício).



Resumindo a informação sobre os sinais de $f(x)$, $g(x)$ que observamos nos gráficos e calculando o sinal de $f(x)/g(x)$ em cada um dos intervalos determinado pelas raízes de f e g, obtemos o seguinte quadro de sinais (para maiores detalhes, veja a aula anterior, sobre inequações-produto):

		$-1/2$		2	x
$f(x) = 2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$g(x) = x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

Por fim, concluímos que os valores de x que satisfazem a inequação-quociente são aqueles em que $-1/2 \leq x < 2$. Mais um vez, atente para o fato de que uma das inequações é estrita e a outra não, pois $-1/2$ pertence ao conjunto solução, enquanto 2 não pertence. Assim, em símbolos, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 \leq x < 2\} = [-1/2, 2).$$

□

Observação 2. *Na última linha do quadro de sinais, onde marcamos o conjunto solução, indicamos com um círculo preto pontos que pertencem a tal conjunto e com um círculo branco os que não pertencem a ele. Além disso, na linha da função $f(x)/g(x)$, entre um sinal e outro colocamos um algarismo 0 quando $f(x)/g(x)$ é zero e colocamos duas barras verticais nos pontos onde $f(x)/g(x)$ não está definida (o que acontece quando $g(x)$ é zero). Alguns outros livros ou professores podem usar símbolos diferentes para indicar isso (por exemplo, nas vídeo-aulas deste módulo a professora usa o símbolo* ND*, que significa "não definido", no lugar das duas barras).*

Exemplo 3. *Resolva*

$$\frac{2x-3}{x-1} \leq 0$$

no conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

Solução. Considere as funções $f(x) = 2x-3$ e $g(x) = x-1$. Faremos como no exercício anterior, calculando os zeros e analisando os sinais de $f(x)$ e $g(x)$. Mas, dessa vez, vamos indicar aqui apenas os quadros de sinais, no lugar de desenhar os gráficos.

Análise do sinal de $f(x) = 2x - 2$: para que $f(x)$ seja igual a zero devemos ter

$$2x - 3 = 0 \implies 2x = 3 \implies x = 3/2.$$

Como o coeficiente de x é igual a 2, que é positivo, temos que a função é crescente. Assim, temos os seguintes sinais:

		$3/2$		x
$2x-3$	$-$	0	$+$	

Análise do sinal de $g(x) = x - 1$: para que $g(x)$ seja igual a zero devemos ter

$$x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

Esta função também é claramente crescente, assim temos os sinais abaixo:

		1		x
$x-1$	$-$	0	$+$	

Elaboração do quadro de sinais do quociente: veja que, como $3/2 > 1$, na primeira linha o número $3/2$ aparece à direita do 1. Então, temos de analisar o sinal em três intervalos: $(\infty, 1)$, $(1, 3/2)$ e $(3/2, \infty)$. Novamente, lembre-se de que devemos ter $g(x) \neq 0$.

		1		$3/2$		x
$f(x) = 2x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x) = x-1$	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Desta vez, os valores que satisfazem a inequação quociente original são os números reais x tais que $1 < x \leq 3/2$. Em símbolos, temos que o conjunto solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 3/2\} = (1, 3/2].$$

$\square$

Exemplo 4. *Resolva, no universo do conjunto dos reais, cada uma das seguintes inequações quociente a seguir:*

(a) $\dfrac{2}{x-5} \leq 0.$

(b) $\dfrac{-2x+3}{2x^2-2} \geq 0.$

Solução.

(a) Como 2 é positivo, para que a fração seja menor ou igual a zero, basta que $x - 5$ seja menor ou igual a zero. Porém, como $x - 5$ está no denominador, ele não pode ser igual a zero. Assim, a inequação equivale a $x - 5 < 0$, ou seja, a $x < 5$.

(b) Sejam $f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = 2x^2 - 2$. Temos que a única raiz de $f(x)$ é $3/2$, e fazendo a análise da variação de seu sinal, temos que $f(x)$ é positiva quando $x < 3/2$ e negativa quando $x > 3/2$. Por sua vez, a função $g(x)$ possui como raízes os números -1 e 1, e seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Logo, $g(x)$ é positiva quando $x < -1$ ou $x > 1$, e negativa quando $-1 < x < 1$. Organizando todos esses dados no quadro de sinais, dispomos os números -1, 1, e $3/2$ em ordem crescente e indicamos os sinais das funções em cada intervalo delimitado por eles:

		-1		1		$3/2$		x
$f(x) = -2x+3$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x) = 2x^2-2$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Note que os valores -1 e 1 não fazem parte da solução (pois eles zeram o denominador), mas $3/2$ faz parte, pois ele zera o numerador e a inequação original permite valores iguais a zero. Deste modo, o conjunto solução é:

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (1, 2]. \end{aligned}$$

$\square$

Vejamos um exemplo um pouco diferente.

Exemplo 5. *Resolva a inequação quociente*

$$\frac{2x-7}{3x-5} \geq 3$$

em $U = \mathbb{R}$.

Solução. Temos que tomar bastante cuidado, pois o lado direito da inequação não é igual a zero. Logo, esta inequação não está no formato indicado no início desta aula. Veja que não é suficiente verificar quando $2x - 7$ e $3x - 5$ são maiores ou menores do que zero, pois isso não irá ajudar a saber quando o quociente entre eles é maior ou igual a 3.

Dessa forma, precisamos começar subtraindo 3 de ambos os lados (para que o lado direito passe a ser zero) e, em seguida, simplificar o lado esquerdo. Temos as seguintes inequações equivalentes.

$$\begin{aligned}\frac{2x-7}{3x-5} \geq 3 &\iff \frac{2x-7}{3x-5} - 3 \geq 0\\ &\iff \frac{(2x-7)-3\,(3x-5)}{3x-5} \geq 0\\ &\iff \frac{2x-7-9x+15}{3x-5} \geq 0\\ &\iff \frac{-7x+8}{3x-5} \geq 0.\end{aligned}$$

Agora sim, podemos considerar as funções $f(x) = -7x+8$ e $g(x) = 3x-5$ e resolver a inequação quociente $f(x)/g(x) \geq 0$.

Temos que a função $f(x) = -7x+8$ é decrescente (pois ela é linear e o coeficiente de x é negativo) e ela é zero quando $x = 8/7$, pois

$$-7x+8 = 0 \implies -7x = -8 \implies x = 8/7.$$

Por sua vez, a função $g(x) = 3x-5$ é crescente (pois ela é linear e o coeficiente de x é positivo) e vale zero quando $x = 5/3$, uma vez que

$$3x-5 = 0 \implies 3x = 5 \implies x = 5/3.$$

Para terminar, precisamos marcar os números $8/7$ e $5/3$ na reta real. Para isso, precisamos saber qual desses números é o maior. Reduzindo essas frações a um denominador comum, temos que $\frac{8}{7} = \frac{24}{21}$, enquanto $\frac{5}{3} = \frac{35}{21}$. Como $\frac{24}{21} < \frac{35}{21}$, segue que $\frac{8}{7} < \frac{5}{3}$.

Elaboração do quadro de sinais:

		$8/7$		$5/3$	x
$f(x) = -7x+8$	$+$	0	$-$		$-$
$g(x) = 3x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$-$	0	$+$		$-$

Interpretando o quadro, temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{8}{7} \leq x < \frac{5}{3}\right\}.$$

□

Observação 6. *Há várias outras maneiras de verificar se* $8/7$ *é menor ou maior que* $5/3$*. Por exemplo, veja que*

$$\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \quad e \quad \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Como $\frac{1}{7} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$*, segue que* $\frac{1}{7} < \frac{2}{3}$*, logo,* $\frac{8}{7} < \frac{5}{3}$*.*

Uma terceira maneira é simplesmente, com o auxílio de uma calculadora, verificar que $8/7$ *é aproximadamente* $1{,}143$*, ao passo que* $5/3$ *é aproximadamente* $1{,}667$*, logo o primeiro é menor do que o segundo.*

Uma quarta maneira, bastante usual, é considerar o produto em cruz:

$$\frac{8}{7} < \frac{5}{3} \iff 8 \cdot 3 < 5 \cdot 7 \iff 24 < 35.$$

Como a última inequação é válida, temos que todas elas são válidas. Veja que, acima, podemos "multiplicar em cruz" pois os números envolvidos são todos positivos. Contudo, consideramos esta maneira pouco didática, pois acaba-se perdendo a noção de grandeza dos números envolvidos.

Observação 7. *No caso da inequação mudar ao longo da resolução, o cuidado com o problema da divisão por zero deve ser redobrado. Uma divisão por zero em qualquer lugar da resolução pode ser fatal. Por outro lado, e sobretudo, o importante é que o conjunto solução seja aquele que satisfaz a inequação original. Assim, na dúvida, é sempre uma boa prática verificar se a inequação original está bem definida nos pontos que são candidatos a entrarem no conjunto solução. No exemplo acima, isso não é uma complicação pois o denominador da inequação final (que usamos na análise de sinal) é o mesmo da inequação original* ($3x-5$)*.*

Exemplo 8. *Encontre para quais valores reais vale a inequação*

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x-2}.$$

Solução. Vamos subtrair $2/(x-2)$ de ambos os lados, a fim de tornar o lado direito igual a zero. Temos as seguintes inequações equivalentes à original:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} &< 0;\\ \frac{(x-2)-2\,(x-1)}{(x-1)(x-2)} &< 0;\\ \frac{x-2-2x+2}{(x-1)(x-2)} &< 0;\\ \frac{-x}{(x-1)(x-2)} &< 0.\end{aligned}$$

Vamos considerar três funções: $f(x) = -x$, $g(x) = x-1$ e $h(x) = x-2$.

Análise do sinal de $f(x) = -x$: temos que a raiz de $f(x) = 0$ é $x = 0$ e esta função é linear decrescente. Logo, $f(x)$ é positiva para $x < 0$ e negativa para $x > 0$.

Análise do sinal de $g(x) = x-1$: a raiz é $x = 1$ e $g(x)$ é linear e crescente. Logo, $g(x)$ é negativa para $x < 1$ e positiva para $x > 1$.

Análise do sinal de $h(x) = x - 2$: a raiz é $x = 2$ e $h(x)$ é linear e crescente. Logo, $g(x)$ é negativa para $x < 2$ e positiva para $x > 2$.

Análise dos denominadores da expressão do enunciado: para que a expressão do enunciado esteja bem definida, precisamos que $x - 1 \neq 0$ e $x - 2 \neq 0$. Assim, precisamos que $x \neq 1$ e $x \neq 2$.

Quadro de sinais:

		0		1		2		x
$f(x) = -x$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$g(x) = x - 1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x) = x - 2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{f(x)}{g(x) \cdot h(x)}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Lembre-se de que queremos que $\dfrac{f(x)}{g(x) \cdot h(x)}$ seja (estritamente) negativo. Logo, os valores de x que satisfazem a inequação são aqueles em que $0 < x < 1$ ou $x > 2$. Em símbolos, temos o conjunto solução

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\} \\ &= (0, 1) \cup (2, \infty). \end{aligned}$$

□

Observação 9. *Um erro comum ao tentar resolver a inequação acima é "multiplicar em cruz". Ao fazer isso, se um dos denominadores for negativo, o sinal da inequação deve ser invertido. Assim, para diferentes valores de x, dependendo dos sinais de $x - 1$ e $x - 2$, pode ser necessário inverter o sinal da inequação. Mais precisamente, "multiplicar em cruz" equivale a multiplicar ambos os lados por $x - 1$ e depois por $x - 2$. Ignorando os sinais, obteríamos a inequação*

$$x - 2 < 2 \cdot (x - 1),$$

que equivale simplesmente a $x - 2 < 2x - 2$ ou, ainda, a $x > 0$. Mas essa resposta está errada, conforme a solução que apresentamos deixa claro.

Pelo mesmo motivo, não podemos resolver o Exemplo 5 simplesmente multiplicando por $3x - 5$ dos dois lados.

Observação 10. *Observe que os números 1 e 2 não fazem parte da solução do exercício anterior, por conta da perda de sentido de uma das frações envolvidas quando $x = 1$ ou $x = 2$. Por outro lado, o número 0 não faz parte da solução simplesmente porque a inequação do enunciado é estrita (do tipo '$<$'). Caso tivéssemos um inequação do tipo '$\leq$', o número 0 passaria a fazer parte da solução, mas os números 1 e 2 permaneceriam fora dela.*

Exemplo 11. *Encontre todos os possíveis valores reais de x que satisfazem a inequação*

$$\frac{(1 + 2x)^5}{(3 - x)^4(1 - 3x)} \leq 0.$$

Solução. Na aula sobre inequações produto resolvemos um exemplo parecido com esse. Recordando o tipo de argumento lá utilizado, veja primeiro que o sinal de $(1 + 2x)^5$ é igual ao sinal de $1 + 2x$, enquanto o sinal de $(3 - x)^4$ é sempre maior ou igual a zero. Mas aqui, se $(3 - x)^4$ for igual a zero, temos um problema, pois este termo está no denominador. Logo, ele não pode ser ignorado completamente.

Graças à discussão do parágrafo anterior, a inequação original é equivalente a:

$$\frac{(1 + 2x)}{(3 - x)^4(1 - 3x)} \leq 0.$$

Para resolvê-la, sejam $f(x) = 1 + 2x$, $g(x) = (3 - x)^4$ e $h(x) = (3x - 1)$. Como sempre, façamos a análise do sinal de cada uma dessas funções.

Análise do sinal de $f(x) = 1 + 2x$: temos que $f(x)$ é crescente, sendo negativa para $x < -1/2$, zero quando $x = -1/2$ e positiva quando $x > -1/2$.

Análise do sinal de $g(x) = (3 - x)^4$: temos que $g(x)$ é nula quando $x = 3$ e positiva caso contrário.

Análise de $h(x) = 1 - 3x$: temos que $h(x)$ é decrescente, sendo positiva para $x < 1/3$, zero quando $x = 1/3$ e negativa quando $x > 1/3$.

Quadro de sinais:

		$-1/2$		$1/3$		3		x
$f(x) = 1 + 2x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x) = (3 - x)^4$	$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$h(x) = 1 - 3x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{f(x)}{g(x) \cdot h(x)}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	

Assim, o conjunto solução é

$$S = (-\infty, -1/2] \cup (1/3, 3) \cup (3, \infty).$$

□

Exemplo 12. *Resolva a inequação seguinte em $\mathbb{R}$:*

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x + 3} \geq 0.$$

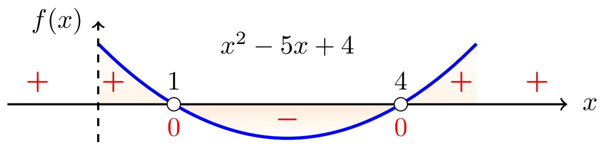
Solução. Considere as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 4x + 3$. Temos que $f(x)$ e $g(x)$ são funções de segundo grau, ambas com concavidade voltada para cima. Vamos encontrar as raízes e analisar o sinal de cada uma delas.

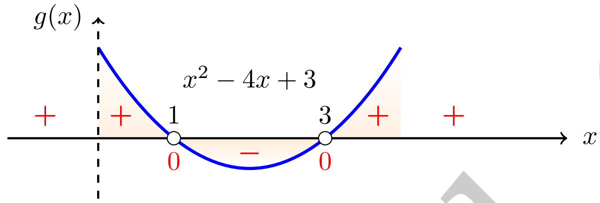
Para que $f(x) = 0$, temos $x^2 - 5x + 4 = 0$. Como $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$, segue que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} (5-3)/2 = 1, \\ \text{ou} \\ (5+3)/2 = 4. \end{cases}$$

Da mesma forma, resolvendo $g(x) = 0$ encontramos que $x = 1$ ou $x = 3$. (Uma maneira alternativa é verificar que 1 e 3 são dois números cuja soma é igual a 4 e produto igual a 3.)

Com isso, temos os dois seguintes gráficos:





Por fim, vamos elaborar o quadro de sinais. Veja que, quando $x = 1$, temos uma raiz em comum para ambas as funções. Logo, temos apenas três valores de x no quadro de sinais: 1, 3 e 4.

		1		3		4		x
$f(x) = x^2 - 5x + 4$	+	0	−		−	0	+	
$g(x) = x^2 - 4x + 3$	+	0	−	0	+		+	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	+	‖	+	‖	−	0	+	

Lembre-se de que 1 e 3 não fazem parte da solução, pois zeram o denominador. Portanto, o conjunto solução S é formado pelos reais que são menores que 3, exceto o número 1, e pelos reais maiores ou iguais a 4. Em símbolos,

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : (x < 3 \text{ e } x \neq 1) \text{ ou } x \geq 4\} \\ &= ((-\infty, 3) - \{1\}) \cup [4, \infty) \\ &= (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup [4, \infty). \end{aligned}$$

□

Solução alternativa. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ como na solução anterior. Em suas formas fatoradas (para detalhes, veja o módulo sobre equação de segundo grau, Aula 2), podemos escrever: $f(x) = (x-1)(x-4)$ e $g(x) = (x-1)(x-3)$. Dessa forma, para $x \neq 1$ temos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-4}{x-3}.$$

Assim, *sob a condição* $x \neq 1$, basta analisarmos quando vale $\frac{x-4}{x-3} \geq 0$. Para que $\frac{x-4}{x-3} = 0$, devemos ter $x = 4$. Veja que $x \neq 3$, pois o denominador deve ser diferente de zero. Por fim, para que a fração seja estritamente positiva, $x - 4$ e $x - 3$ devem ter o mesmo sinal. Quando $x < 3$, temos que ambos são negativos; quando $3 < x < 4$, o numerador é negativo e o denominador positivo; por fim, para $x > 4$, ambos são positivos.

Resumindo, na solução do problema original devemos ter $x \neq 1$ e ($x < 3$ ou $x \geq 4$). O conjunto solução, como não poderia deixar de ser, é o mesmo da primeira solução.

□

Exemplo 13. *Resolva, no universo dos números reais, a inequação*

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - \pi} \geq 0.$$

Solução. Sejam $f(x) = x^2 - 6x + 9$ e $g(x) = x - \pi$. Veja que, na forma fatorada, temos $f(x) = (x-3)^2$. Logo, $f(x)$ é maior ou igual a zero, sendo igual a zero apenas quando $x = 3$. (Geometricamente, isso corresponde ao fato de que o gráfico de $f(x)$ é uma parábola tangente ao eixo-x e contida no semiplano superior do plano cartesiano.) Por sua vez, $g(x)$ é uma função linear crescente, com zero em $x = \pi$. Lembre-se de que π é um número real (irracional), que vale aproximadamente 3,14. Logo, $\pi > 3$. Temos, então, o seguinte quadro de sinais:

		3		π		x
$f(x) = (x-3)^2$	+	0	+		+	
$g(x) = x - \pi$	−		−	0	+	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	−	0	−	‖	+	

Dessa forma, $f(x)/g(x)$ é estritamente positiva apenas quando $x > \pi$. Mas, $x = 3$ também é uma solução, já que neste caso $f(x)/g(x)$ é igual a zero. Logo,

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : x = 3 \text{ ou } x > \pi\} \\ &= \{3\} \cup (\pi, \infty). \end{aligned}$$

□

Exemplo 14. *Resolva, no universo dos números reais, a inequação*

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2} \leq 0.$$

Solução. Veja que $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ é sempre maior ou igual a zero, pois é o quadrado de um número real. Da mesma forma, x^2 é sempre maior ou igual a zero, o que implica que $x^2 + 2$ é estritamente maior que zero, para todo número real. Dessa forma, para todo x real temos que

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2} \geq 0.$$

Assim, a única maneira de satisfazer o enunciado é quando esta fração for igual a zero. Neste caso, o numerador tem que ser igual a zero e, como vimos, isso acontece precisamente quando $(x+1)^2 = 0$, ou seja, $x = -1$. Veja que $x = -1$ não zera o denominador, logo, o conjunto solução é o conjunto unitário

$$S = \{-1\}. \qquad \square$$

Exemplo 15. *Encontre os valores x reais tais que*

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} \geq 0.$$

Solução. Podemos fatorar o numerador pelo seguinte produto notável

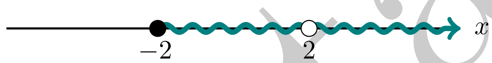
$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2).$$

Contudo, a simplificação

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$$

só é válida para $x \neq 2$. (Quando $x = 2$, o denominador $x - 2$ vale zero e a fração do enunciado não está definida.) Então, para $x \neq 2$, a inequação original equivale a $x + 2 \geq 0$, ou seja, $x \geq -2$.

Logo, os valores de x que satisfazem a inequação original são aqueles maiores ou iguais a -2 e diferentes de 2.



$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \text{ e } x \neq 2\} \\ &= [-2, 2) \cup (2, \infty). \end{aligned} \qquad \square$$

Dicas para o Professor

Recomendamos que este assunto seja abordado em dois encontros de 50 minutos, em continuidade aos encontros da aula anterior (sobre inequações produtos). Veja que as resoluções de inequações quocientes e inequações produto são muito similares. De fato, a diferença crucial reside no fato de que o denominador do quociente precisa ser sempre diferente de zero, independentemente do sinal da inequação quociente.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.