Material Teórico - Tópicos Adicionais - Recorrências

Recorrências - Parte 3

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de fevereiro de 2020

1 Recorrências de 2ª ordem lineares com coeficientes constantes

O foco, agora, é estudo de **recorrências de segunda ordem**, aquelas onde cada termo (a partir do terceiro) é dado em função dos dois termos que imediatamente o antecedem.

Assim como na segunda parte, mostraremos como resolver apenas as recorrências lineares, mas, dessa vez, nos restringiremos apenas ao caso em que os coeficientes são constantes. Ou seja, vamos estudar sequências $(T_n)_{n\geq 0}$ descritas por uma recorrência da forma

$$T_{n+2} = aT_{n+1} + bT_n + c \quad \text{para todo } n \geq 0, \qquad (1)$$

onde a, b e c são constantes (isto é, não dependem de n).

Na busca de um método para resolver esse tipo de recorrência, vamos considerar primeiro o caso em o termo independente, c, é igual a zero. Esse tipo de recorrência linear é chamada de **homogênea**. Assim,

$$T_{n+2} = aT_{n+1} + bT_n \quad \text{para todo } n \geq 0, \qquad (2)$$

é uma *recorrência linear, homogênea, de segunda ordem e com coeficientes constantes*.

Ao invés de manipular a relação de recorrência até encontrarmos uma fórmula para T_n (como fizemos na aula passada), a ideia primordial desta aula será simplesmente "chutar" um possível formato para a solução, usando nossa intuição, para depois encontrar uma solução que se enquadre neste formato.

Este método se baseia fortemente no fato de que, dados a, b, c e os valores de T_1 e T_2, existe apenas uma sequência que satisfaz a relação (2), já que, fixada a relação de recorrência, os dois primeiros termos determinam unicamente todos os outros. Veja que se uma entidade superior (oráculo), de alguma forma mágica, nos fornecesse uma solução, não precisaríamos acreditar cegamente nela. Para que a solução seja aceita matematicamente, é necessário e suficiente **verificar** que ela realmente é válida e se assegurar de que não há outras soluções. Esse tipo de palpite em Ciências, que normalmente não é uma chute aleatório mas sim baseado em conhecimento e experiência prévios, é chamado de "**ansatz**" e é usado com frequência no estudo da Física.

A primeira ideia, por falta de outra melhor, é tentar verificar se uma solução para uma equação de segunda ordem homogênea pode ter uma formato parecido com a solução de uma equação de primeira ordem homogênea. Lembre-se de que uma equação linear de *primeira* ordem com coeficientes constantes é da forma $T_{n+1} = aT_n + b$. Sendo homogênea, temos que $b = 0$, ou seja, $T_{n+1} = aT_n$. Vimos que, neste caso, temos uma PG e $T_n = T_0 a^n$.

Com isso, nosso primeiro "*ansatz*" será que $T_n = C\,x^n$, com C e x constantes. Vamos testar se isso pode ser a solução de uma recorrência de segunda ordem também. Infelizmente, nem sempre isso será verdade, mas em alguns casos podemos ter "sorte", como no exemplo seguinte.

Exemplo 1. *Seja $(T_n)_{n\geq 0}$ a sequência que satisfaz: $T_0 = 2$, $T_1 = 6$ e $T_{n+2} = 5T_{n+1} - 6T_n$, para todo $n \geq 0$. Encontre uma fórmula para o termo geral T_n.*

Solução. Vamos testar se existem valores para C e x tais que, para todo n, tenhamos $T_n = C\,x^n$ (este é nosso ansatz). Substituindo essa expressão na equação de recorrência ($T_{n+2} = 5T_{n+1} - 6T_n$), com os índices adequados, precisamos verificar se é possível que

$$Cx^{n+2} = 5Cx^{n+1} - 6Cx^n.$$

Como queremos $C \neq 0$ (caso contrário, teríamos que $T_n = 0$ para todo n), podemos dividir ambos os lados por C para obter:

$$x^{n+2} = 5x^{n+1} - 6x^n.$$

Pelo mesmo motivo, podemos dividir ambos os lados da equação acima por x^n, obtendo a equação de segundo grau

$$x^2 = 5x - 6,$$

à qual nos referiremos como a **equação característica** da relação de recorrência.

Essa equação possui duas raízes[1]: $x = 2$ ou $x = 3$. Sendo assim, $T_n = C \cdot 2^n$ ou $T_n = C \cdot 3^n$. É preciso interpretar o que isso quer dizer: esses são os possíveis candidatos a solução, *assumindo que nosso ansatz seja válido*, mas, a princípio, poderiam existir soluções de outros formatos. Além disso, ainda é preciso verificar se existe algum C que faça com que um desses candidatos se torne uma solução. Aqui, o problema é que precisamos atentar aos valores de T_0 e T_1, os quais até agora ignoramos. Vamos analisar dois casos:

Caso 1: $T_n = C \cdot 2^n$ para todo $n \geq 0$. Em particular para $n = 0$ temos que $T_0 = C \cdot 2^0 = C$; do enunciado, temos que $T_0 = 2$, logo, $C = 2$. Com isso, nosso candidato a solução é $T_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Conduto, para $n = 1$ isso implicaria que $T_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$, mas é dado no enunciado que que $T_1 = 6$. Logo, a sequência $T_n = 2^{n+1}$ não satisfaz o enunciado.

Caso 2: $T_n = C \cdot 3^n$ para todo $n \geq 0$. Em particular, para $n = 0$ temos que $T_0 = C \cdot 3^0 = C$; do enunciado, temos que $T_0 = 2$, logo, $C = 2$. Com isso, o atual candidato a solução é $T_n = 2 \cdot 3^n$. Dessa vez, fazendo $n = 1$ temos que $T_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$, o que está de acordo com o que o enunciado fornece.

Dessa forma, temos que a sequência $T_n = 2 \cdot 3^n$ satisfaz que $T_0 = 2$, $T_1 = 6$ e satisfaz a recorrência $T_{n+2} = 5T_{n+1} -$

[1]Caso você não se lembre de como calcular essas raízes, revise o módulo sobre equações de segundo grau.

$6T_n$ (já que 3 é raiz da equação característica). Como só pode existir uma sequência que satisfaz tudo isso, temos que esta é a sequência desejada. □

Exemplo 2. *Seja $(T_n)_{n\geq 0}$ a sequência que satisfaz: $T_0 = 4$, $T_1 = 7$ e $T_{n+2} = 5T_{n+1} - 6T_n$ para todo $n \geq 0$. Encontre a fórmula para o termo geral T_n.*

Solução. Neste exemplo, temos a mesma equação de recorrência do Exemplo 1; porém, temos uma outra sequência, já que os valores de T_0 e T_1 mudaram.

Começamos com o mesmo ansatz, $T_n = C\,x^n$, obtemos a mesma equação característica e os mesmos candidatos a solução: $T_n = C\,2^n$ ou $T_n = C\,3^n$. Contudo, dessa vez, para qualquer valor de C, nenhum desses candidatos funciona. Vejamos:

Se fosse $T_n = C \cdot 2^n$ (para todo n), substituindo n por 0 e por 1, teríamos que $T_0 = C$ e $T_1 = 2C$. Porém, o enunciado nos diz que $T_0 = 4$ e $T_1 = 7$, o que nos daria $C = 4$ e $2C = 7$, o que é impossível. Da mesma forma, se fosse $T_n = C \cdot 3^n$ (para todo n), substituindo n por 0 e por 1, teríamos que $T_0 = C$ e $T_1 = 3C$. Novamente, usando que $T_0 = 4$ e $T_1 = 7$, obteríamos $C = 4$ e $3C = 7$, o que também é impossível.

Como podemos interpretar esse resultado? Bem, nosso palpite inicial (o ansatz), estava errado e não existe sequência do tipo $T_n = C \cdot x^n$ que satisfaça o enunciado. No entanto, nem tudo está perdido, pois as sequências 2^n e 3^n satisfazem a equação de recorrência $T_{n+2} = 5T_{n+1} - 6T_n$ e "*só*" não satisfazem o enunciado por conta dos valores iniciais T_0 e T_1.

A beleza das equações de recorrência lineares homogêneas é que, ignorados os valores dos termos iniciais, podemos **combinar** soluções para formar novas soluções. De fato, afirmamos que, para quaisquer constantes C_1 e C_2, a sequência

$$T_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n \tag{3}$$

também satisfaz a relação de recorrência $T_{n+2} = 5T_{n+1} - 6T_n$. Vejamos:

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= C_1 \cdot 2^{n+2} + C_2 \cdot 3^{n+2} \\ &= C_1\left(5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n\right) + C_2\left(5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n\right) \\ &= 5(C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 3^{n+1}) - 6(C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n) \\ &= 5T_{n+1} - 6T_n. \end{aligned}$$

Dessa forma, basta encontrar C_1 e C_2 para os quais tenhamos $T_0 = 4$ e $T_1 = 7$. Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ na equação (3), temos:

$$\begin{cases} T_0 = C_1 + C_2 \\ T_1 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases}.$$

Com isso, temos o sistema linear de equações

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + 3C_2 = 7 \end{cases},$$

que, uma vez resolvido[2], fornece $C_1 = 5$ e $C_2 = 1$. Logo, $T_n = 5 \cdot 2^n - 3^n$. Veja que, por construção, essa sequência satisfaz $T_0 = 4$ e $T_1 = 7$ assim como a relação de recorrência do enunciado. Logo, ela é a (única) sequência procurada. □

Observação 3. *No Exemplo 1, após encontrar as raízes da equação característica, poderíamos terminar a solução de forma semelhante ao que fizemos no Exemplo 2: Assumindo que $T_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$ e usando que $T_0 = 2$ e $T_1 = 6$, obtemos o sistema*

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + 3C_2 = 6. \end{cases}$$

Ao resolvê-lo chegamos a $C_1 = 0$ e $C_2 = 2$, de onde concluímos que $T_n = 2 \cdot 3^n$.

Observação 4. *No inicio da solução do Exemplo 1, fizemos a substituição de T_n por Cx^n e, logo depois, conseguimos eliminar C da equação característica. Se fizermos essa substituição em qualquer recorrência* linear homogênea*, o termo C sempre poderá ser eliminado. Além disso, no Exemplo 2, vimos que a solução nem sempre é da forma Cx^n. Por isso, nos exemplos seguintes começaremos com o ansatz simplificado $T_n = x^n$ e acrescentaremos as constantes C_1 e C_2 apenas ao final, ao combinar os possíveis candidatos a fim de acertar os valores de T_0 e T_1.*

Exemplo 5. *A* sequência de Fibonacci *é a sequência $(F_n)_{n\geq 0}$ em que $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todos $n \geq 2$, ou seja, cada termo é obtido somando-se os dois termos que o antecedem. Podemos verificar facilmente que seus primeiros termos são:*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots.$$

Encontre uma fórmula para o termo geral, F_n, dessa sequência.

Solução. Como nos exemplos anteriores (e seguindo a dica da observação), começamos ignorando os valores de F_0 e F_1 e buscamos uma solução particular da forma $F_n = x^n$ para a recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Segue que $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ e, dividindo ambos os lados por x^{n-2}, obtemos a equação característica $x^2 = x + 1$, que equivale a $x^2 - x - 1 = 0$. Aplicando a Fórmula de Bháskara, calculamos o discriminante $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$ e as raízes $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Por fim, levando em conta os valores de F_0 e F_1, vamos buscar uma solução da forma

$$\begin{aligned} F_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \\ &= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

[2] Consulte o módulo sobre resolução de sistemas lineares.

Substituindo n por 0 e 1, respectivamente, e observando que $r_1^0 = r_2^0 = 1$, temos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Logo, $c_2 = -c_1$ e substituindo isso na segunda equação do sistema obtemos:

$$\begin{aligned} c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \\ \Longrightarrow\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2}\right) &= 1 \\ \Longrightarrow\ c_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \\ \Longrightarrow\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{4}$$

□

Observação 6. *Pode parecer surpreendente, mas para todo n natural o resultado da expressão (4) é um número natural, justamente o n-ésimo número de Fibonacci. Um exercício interessante é testar alguns valores pequenos para n (como $n = 2$ ou $n = 3$) e desenvolver os produtos notáveis a fim de verificar que $F_2 = 1$ e $F_3 = 2$.*

Nos exemplos acima, tivemos sorte, pois a equação característica possuía duas raízes distintas. Veja que sequer é importante que tais raízes sejam números reais, contanto que seja distintas. Contudo, quando o discriminante da equação característica for igual a 0, teremos um problema. Neste caso, precisaremos de um ansatz diferente para terminar de resolver a recorrência.

Exemplo 7. *Resolva a recorrência $R_{n+2} = 6R_{n+1} - 9R_n$, sabendo que $R_0 = 5$ e $R_1 = 27$.*

Solução. Como antes, começamos testando a solução $R_n = x^n$. Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned} x^{n+2} = 6x^{n+1} - 9x^n &\implies x^2 = 6x - 9 \\ &\implies (x-3)^2 = 0 \\ &\implies x = 3. \end{aligned}$$

Com isso, até agora temos apenas um tipo de candidato a solução: $R_n = C3^n$, para algum C. Contudo, não existe um valor para C que satisfaça simultaneamente $R_0 = C\,3^0 = C = 5$ e $R_1 = C\,3^1 = 3C = 27$. O problema é que a fórmula precisa acertar os dois primeiros valores da sequência (R_0 e R_1), mas só temos a liberdade de escolher uma variável (C).

Porém, o fato de que 3 ser uma raiz dupla da equação característica implica que a sequência $(n3^n)_{n\geq 0}$ também satisfaz a equação de recorrência. Realmente, se fizermos $R_n = n3^n$ para todo n, podemos verificar que a equação $R_{n+2} = 6R_{n+1} - 9R_n$ é satisfeita. Mais precisamente, assumindo que $R_n = n3^n$ e $R_{n+1} = (n+1)3^{n+1}$, calculamos

$$\begin{aligned} R_{n+2} &= 6R_{n+1} - 9R_n \\ &= 6(n+1)3^{n+1} - 9n3^n \\ &= 6n3^{n+1} + 6\cdot 3^{n+1} - n3^{n+2} \\ &= 2n3^{n+2} + 2\cdot 3^{n+2} - n3^{n+2} \\ &= (n+2)3^{n+2}. \end{aligned}$$

Agora, temos dois candidatos particulares a solução, 3^n e $n3^n$, e podemos combiná-los para formar soluções do tipo: $R_n = C_1\,3^n + C_2 n\,3^n$. Por fim, resta calcular C_1 e C_2 de modo que tenhamos $R_0 = 5$ e $R_1 = 27$. Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ temos:

$$\begin{cases} C_1 + 0\cdot C_2 = 5 \\ 3C_1 + 3C_2 = 27. \end{cases}$$

Logo, $C_1 = 4$ e $C_2 = 5$, de sorte que $R_n = 4\cdot 3^n + 5n\cdot 3^n$. □

2 O método da equação característica

Finalmente, exibimos o método geral para resolver qualquer recorrência do tipo $T_{n+2} = aT_{n+1} + bT_n$. Comece fazendo a substituição de T_n por x^n, para obter:

$$x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n.$$

Dividindo ambos os lados por x^n obtemos, conforme comentamos anteriormente, a chamada **equação característica** que, neste caso, é a equação de segundo grau:

$$x^2 = ax + b.$$

Ao resolvermos essa equação, duas possibilidades podem ocorrer:

Caso 1: a equação característica possui duas raízes distintas. Tais raízes não precisam ser números reais, de modo que caímos neste caso sempre que o discriminante Δ da equação característica for diferente de zero. Calculamos as raízes e as chamamos de r_1 e r_2. A expressão

$$T_n = C_1\,r_1^n + C_2\,r_2^n$$

é chamada de **solução geral** da recorrência, pois podemos demonstrar[3] que, independentemente dos valores de T_0

[3] A demonstração é essencialmente a mesma que foi feita no Exemplo 2; por isso, omitimos os detalhes aqui.

e T_1, a sequência possui este formato. Para finalizar, substitua dois valores pequenos de n, para os quais o valor de T_n é conhecido (por exemplo, $n = 0$ e $n = 1$) e resolva o sistema (linear com duas equações) assim obtido para encontrar os valores adequados de C_1 e C_2. Utilizando o fato de que $r_1 \neq r_2$, é possível demonstrar que esse sistema sempre possui uma única solução.

Caso 2: a equação característica possui raízes iguais, ou seja, seu discriminante Δ é igual a zero. Calcule a raiz da equação característica e chame-a de r. Neste caso, a solução geral terá o formato

$$T_n = C_1 r^n + C_2 n r^n.$$

Como no caso anterior, substitua dois valores pequenos de n e resolva o sistema obtido para calcular os valores de C_1 e C_2.

Observação 8. *No caso em que r é a única raiz de $x^2 = ax + b$, podemos observar que $a = 2r$ e $b = -r^2$. Com isso, a equação de recorrência original possui o formato $T_{n+2} = 2rT_{n+1} - r^2 T_n$ e podemos facilmente verificar que tanto r^n como nr^n são soluções dessa recorrência (elas são chamadas soluções particulares da recorrência). Por fim, a mesma demonstração usada no Exemplo 2 implica que $T_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ também é solução.*

2.1 Recorrências não homogêneas

Finalmente, tratamos do caso não homogêneo, ou seja, aquele em que a sequência $(T_n)_{n\geq 0}$ satisfaz, para todo n, a recorrência

$$T_{n+2} = aT_{n+1} + bT_n + c, \tag{5}$$

onde a, b e c são constantes dadas, com $c \neq 0$.

Este caso pode ser facilmente reduzido ao caso anterior. Realmente, a partir da condição 5, podemos escrever:

$$\begin{cases} T_{n+2} = aT_{n+1} + bT_n + c \\ T_{n+1} = aT_n + bT_{n-1} + c \end{cases}.$$

A fim de eliminar c, subtraímos a segunda equação da primeira, obtendo

$$(T_{n+2} - T_{n+1}) = a(T_{n+1} - T_n) + b(T_n - T_{n-1}).$$

Em seguida, definimos uma nova sequência $(R_n)_{n\geq 1}$, pondo $R_n = T_n - T_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Claramente, (R_n) satisfaz a equação homogênea:

$$R_{n+2} = aR_{n+1} + bR_n.$$

Podemos usar os valores de T_0, T_1 para calcular $T_2 = aT_1 + bT_0 + c$, $R_1 = T_1 - T_0$ e $R_2 = T_2 - T_1$. Com isso, podemos aplicar o método da seção anterior para calcular R_n. Para terminar, veja que, uma vez conhecendo R_n, temos que $T_n = T_{n-1} + R_n$ é uma equação linear de primeira ordem. Então, usando os métodos da aula passada, concluímos que

$$T_n = T_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

Exemplo 9. *Resolva a recorrência $T_{n+2} = 7T_{n+1} - 10T_n + 3$, sabendo que $T_0 = 1$ e $T_1 = 2$.*

Solução. Defina a sequência auxiliar $(R_n)_{n\geq 1}$ pondo $R_n = T_n - T_{n-1}$. Pelo que observamos acima, vale que:

$$R_{n+2} = 7R_{n+1} - 10R_n, \text{para todo } n \geq 1.$$

Essa recorrência possui equação característica $x^2 = 7x - 10$, com raízes $x = 2$ e $x = 5$. Logo, sua solução geral é $R_n = C_1\, 2^n + C_2\, 5^n$. Note que $R_1 = T_1 - T_0 = 2 - 1 = 1$, $T_2 = 7T_1 - 10T_0 + 3 = 14 - 10 + 3 = 7$ e, daí, $R_2 = T_2 - T_1 = 7 - 2 = 5$. Com isso, substituindo $n = 1$ e $n = 2$ na solução geral de R_n, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2C_1 + 5C_2 = 1 \\ 4C_1 + 25C_2 = 5 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{5}$. Portanto,

$$R_n = 0 \cdot 2^n + \frac{1}{5} \cdot 5^n = 5^{n-1}.$$

Finalmente, para $n \geq 1$ vale que

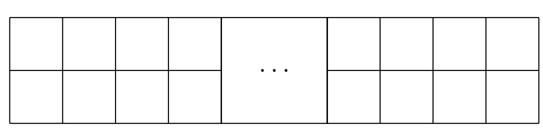
$$\begin{aligned} T_n &= T_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_n \\ &= 1 + (1 + 5^1 + \ldots + 5^{n-1}) \\ &= 1 + \frac{5^n - 1}{4}. \end{aligned}$$

□

3 O problema dos dominós

Nas aulas anteriores, vimos vários exemplos de como certos problemas combinatórios podem ser modelados usando recorrências. Vejamos, agora, um exemplo clássico em que a recorrência obtida é de segunda ordem.

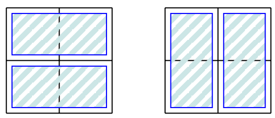
Exemplo 10 (O problema dos dominós). *Considere um retângulo $2 \times n$, divido em $2n$ quadrados unitários como na figura abaixo:*



De quantas maneiras podemos posicionar sobre esse retângulo n peças de dominó idênticas, cada uma de tamanho 2×1, de forma a cobri-lo completamente, sem sobreposição das peças. Considere que é permitido posicionar cada peça verticalmente ou horizontalmente em relação aos lados do retângulo.

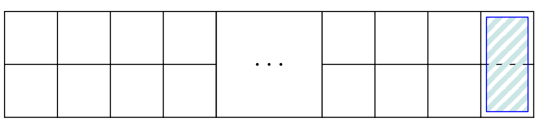
Solução. Vamos modelar este problemas usando uma recorrência. Seja R_n o número de maneiras de dispor os n dominós para cobrir o retângulo $2 \times n$.

Temos $R_1 = 1$ já que há apenas uma maneira de dispor um único dominó sobre o dado retângulo. Por outro lado, $R_2 = 2$, já que no retângulo 2×2 podemos colocar dois dominós verticalmente ou horizontalmente, como na figura abaixo:

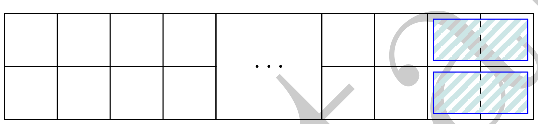


Resta entender como podemos calcular R_n, para $n \geq 2$, em função dos termos que o antecedem na sequência. Para isso, vamos analisar as possíveis maneiras de colocar as últimas peças, ou seja, as que cobrem a(s) coluna(s) mais à direita do retângulo. Há dois casos a considerar:

Caso 1: a n-ésina coluna do retângulo é coberta por um único dominó vertical (ver figura). Neste caso, o número de maneiras de cobrir o restante do retângulo é precisamente R_{n-1}, já que ele possui dimensões $2 \times (n-1)$:



Caso 2: o caso anterior não acontece. Então, veja que a única outra forma de cobrir a última coluna do retângulo é usando dois dominós horizontais (ver figura). Feito isso, resta cobrir o restante do retângulo, que ficou com dimensões $2 \times (n-2)$, usando as demais $n-2$ peças. Isso pode ser feito de R_{n-2} maneiras:

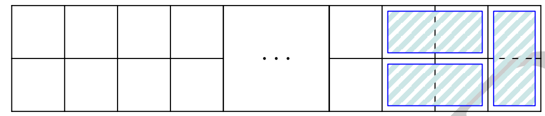


É importante observar que toda maneira de cobrir o retângulo $2 \times n$ se enquadra em exatamente um dos casos acima. Portanto, o valor de R_n é obtido somando os números de possibilidades de cada caso, ou seja,

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-2}.$$

Isso prova que R_n é precisamente a sequência de Fibonacci, que apresentamos na seção anterior. □

Observação 11. *Na solução do Exemplo 10, não se consegue expressar facilmente R_n em função apenas de R_{n-1}, pois, invariavelmente, temos que olhar para as duas últimas colunas do retângulo $2 \times n$. Um erro comum seria pensar que há apenas 2 maneiras de cobrir essas duas últimas colunas: com dois dominós verticais ou dois horizontais, chegando à conclusão de que $R_n = 2R_{n-2}$. Ao fazer isso não estaríamos contando todas as configurações, pois não é necessário que as colunas mais à direita estejam cobertas por exatamente dois dominós. A figura abaixo mostra um exemplo que não estaria sendo contabilizado:*



Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo dessa aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos. Algumas das demonstrações poderiam ser feitas com mais detalhes para alunos que já estudaram o Princípio de Indução Matemática, mas evitamos propositalmente fazer isso aqui, para não desviar o foco da aula. Quanto ao estudo das equações de recorrência lineares, além da importância intrínseca que possuem, vale ressaltar que elas são um importante prelúdio para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), durante o Ensino Superior. De fato, apesar do contexto ser completamente diferente, as técnicas apresentadas aqui funcionam de maneira quase idêntica na resolução das chamadas EDOs lineares de segunda ordem. A referência a seguir também contém material sobre recorrências, assim como o site `https://poti.impa.br`.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.