Material Teórico - Módulo Números Naturais: Contagem, Divisibilidade e Teorema da Divisão Euclidiana

Números Naturais e Problemas de Contagem Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de julho de 2016

Portal da OBMEP

1 O conjunto dos números naturais

Nesse material serão exploradas algumas propriedades do conjunto dos **números naturais**. De modo intuitivo, um número natural é um número que serve para expressar uma certa quantidade de objetos. De modo menos informal, para construir o conjunto dos números naturais iniciamos por um elemento, denominado **zero** e denotado por 0; então, tomamos o *sucessor* de zero, ao qual chamamos *um* e denotamos 1, depois o sucessor de 1, ao qual chamamos *dois* e denotamos 2, e assim por diante. Prosseguindo desse modo, obtemos o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

dos números naturais ao qual estamos acostumados.

A ideia de construir o conjunto dos números naturais tomando sucessores repetidas vezes a partir do zero é formalizada com os **Axiomas de Peano**, que foram introduzidos pelo matemático italiano Giuseppe Peano no fim do século XIX. Listamos os axiomas de Peano abaixo:

(i) Todo número natural possui um sucessor.

(ii) Todo número natural, exceto o 0, é sucessor de um único número natural.

(iii) Se um subconjunto X de $\mathbb{N}$ contiver o elemento 0 e os sucessores de todos os seus elementos, então, $X = \mathbb{N}$.

O axioma (iii) é conhecido como o **Princípio de Indução** e serve de base para a demonstração de uma série de propriedades a respeito dos números naturais. Por exemplo, a partir do Princípio de Indução é possível definir com precisão as operações aritméticas elementares de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação em $\mathbb{N}$. O leitor interessado pode ler mais sobre dos Axiomas de Peano no item [3] da bibliografia recomendada no final desse material.

2 Alguns problemas de contagem

Ao longo desta seção, apresentaremos alguns problemas elementares envolvendo contagem.

Exemplo 1. *Quantos elementos tem o conjunto* $A = \{26, 27, 28, \ldots, 131, 132\}$*, contendo todos os naturais de* 26 *a* 132*?*

Solução. Observe que podemos escrever

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 131, 132\} - \{1, 2, 3, \ldots, 24, 25\}.$$

Portanto, o número de elementos do conjunto A é dado por $132 - 25 = 107$. □

Para o próximo exemplo, utilizamos a experiência do leitor com números pares e ímpares, conceitos que serão revistos na próxima seção.

Exemplo 2. *Quantos números pares existem entre* 35 *e* 98*?*

Solução. Como os números pares entre 35 e 98 formam o conjunto

$$A = \{36, 38, 40, \ldots, 94, 96\},$$

o que queremos calcular é o número de elementos de A. Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, \ldots, 94, 96\} - \{2, 4, 6, \ldots, 32, 34\} \\ &= \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots, 2 \cdot 47, 2 \cdot 48\} - \\ &\quad - \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots, 2 \cdot 16, 2 \cdot 17\}, \end{aligned}$$

de forma que o número de elementos de A é $48 - 17 = 31$. □

Exemplo 3. *Quantos algarismos são necessários para numerar as* 120 *páginas de um livro?*

Solução. Inicialmente, a estratégia é contar a quantidade de páginas numeradas com um, dois e três algarismos. Em seguida, multiplicamos esses valores, respectivamente, por 1, 2 e 3, pois estamos interessados em saber a quantidade de algarismos utilizados. Para finalizar, basta somar os resultados encontrados no passo anterior.

De fato, temos:

i) Páginas com um algarismo: $1, 2, 3, \ldots, 9$, totalizando 9×1 algarismos.

ii) Páginas com dois algarismos: $10, 11, 12, \ldots, 99$, totalizando $(99 - 9) \times 2 = 90 \times 2 = 180$ algarismos.

iii) Páginas com três algarismos: $100, 101, 102, \ldots, 120$, totalizando $(120 - 99) \times 3 = 21 \times 3 = 63$ algarismos.

Portanto, o número de algarismos utilizados para numerar as páginas do livro é

$$9 + 180 + 63 = 252.$$

□

Exemplo 4. *Para numerar as páginas de um livro, foram necessários* 1302 *algarismos. Quantas páginas tem esse livro?*

Solução. Agora o problema é o inverso do anterior, pois aqui temos o total de algarismos utilizados para numerar as páginas de um livro e queremos calcular sua quantidade de páginas.

Já sabemos que, para numerar as páginas 1 a 99 utilizamos um total de $9 + 180 = 189$ algarismos. Por outro lado, para numerar as páginas 100 a 999, precisamos de $(999 - 99) \times 3 = 900 \times 3 = 2700$ algarismos. Então, para

Portal da OBMEP

numerar as páginas 1 a 999, utilizamos $189 + 2700 = 2889$ algarismos.

Uma vez que $189 < 1302 < 2889$, segue que o número da última página do livro deve ter três algarismos. Como já foram utilizados 189 algarismos até a página 99, para saber a quantidade de páginas além da nonagésima nona, tomamos a diferença $1302 - 189 = 1113$, obtendo o total de algarismos utilizados para numerar as páginas após a página 99. Dividindo o resultado por 3, obtemos $1113 \div 3 = 371$, que é o total de páginas do livro após a página 99. Portanto, o livro possui $99 + 371 = 470$ páginas. $\square$

Exemplo 5. *Calcule o 2015^o algarismo da lista*

$$1234567891011121314\ldots,$$

obtida justapondo os naturais um após o outro.

Solução. Vimos no exemplo anterior que, para escrever todos os números de 1 a 99, usamos 189 algarismos, enquanto para escrever os números de 100 a 999 usamos 2700 algarismos. Portanto, é imediato que o algarismo que ocupa a posição 2015 é um dos algarismos de um número natural de três algarismos.

Descontando 189 de 2015, obtemos $2015 - 189 = 1826$, de forma que esse é o número de algarismos escritos até o algarismo da posição 2015, os quais são todos algarismos de números de três algarismos.

Dividindo 1826 por 3, obtemos $1826 = 608 \times 3 + 2$, resultado que deve ser interpretado da seguinte maneira: até o algarismo da posição 2015, escrevemos os algarismos dos 608 primeiros números de três algarismos, mais dois algarismos do número subsequente. Como o primeiro número de três algarismos é 100, após escrevermos 608 números de três algarismos o próximo número será $100 + 608 = 708$. Portanto, o algarismo na posição 2015 é o segundo algarismo desse número, isto é, 0. $\square$

3 Números pares e ímpares

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos

$$\mathbb{N} = \mathbb{P} \cup \mathbb{I},$$

em que

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, \ldots\} \text{ e } \mathbb{I} = \{1, 3, 5, \ldots\}.$$

$\mathbb{P}$ é o conjunto dos **números pares** e $\mathbb{I}$ é o conjunto dos **números ímpares**. Observe que cada número par é múltiplo de 2, o que nos permite representar um número par qualquer por $2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, qualquer número ímpar deixa resto 1 ao ser dividido por 2, ou seja, qualquer número ímpar tem a forma $2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

Um critério para decidir se um número é par ou ímpar simplesmente através de sua representação decimal é dado pelo exemplo a seguir.

Exemplo 6. *Observamos o algarismo das unidades de um natural n. Se ele for 0, 2, 4, 6 ou 8, então o número n é par; caso o algarismo das unidades seja 1, 3, 5, 7 ou 9, o número n é ímpar.*

Prova. Realmente, se o último algarismo de n for a, então podemos escrever

$$n = **\ldots*0 + a,$$

em que $**\ldots*$ representa o número formado pelos demais algarismos de n. Denotando tal número por m e observando que $**\ldots*0 = 10m$, temos

$$n = 10m + a = 2(5m) + a.$$

Agora, se a for par, digamos $a = 2l$, então

$$n = 2(5m) + 2l = 2(5m + l),$$

e n também será par. Se a for ímpar, digamos $a = 2l + 1$, então

$$n = 2(5m) + 2l + 1 = 2(5m + l) + 1,$$

e n também será ímpar. $\square$

Dizemos que dois inteiros têm **mesma paridade** se, e só se, ambos forem pares ou ambos forem ímpares. O próximo exemplo explora esse conceito.

Exemplo 7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.*

(i) Se m e n têm uma mesma paridade, então $m + n$ e $m - n$ (caso $m \geq n$) são pares;

(ii) Se m e n têm paridades distintas, então $m + n$ e $m - n$ (caso $m > n$) são ímpares.

Solução. Sejam m e n números naturais de mesma paridade. Há dois casos a considerar:

(i) Se m e n são ambos pares, então existem naturais k e l tais que $m = 2k$ e $n = 2l$. Portanto,

$$m + n = 2k + 2l = 2(k + l)$$

e (caso $m \geq n$)

$$m - n = 2k - 2l = 2(k - l),$$

ou seja, $m + n$ e $m - n$ (caso $m \geq n$) também são pares.

(ii) Se m e n são ímpares, então existem naturais k e l tais que $m = 2k + 1$ e $n = 2l + 1$, o que implica

$$m + n = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1)$$

e (caso $m \geq n$)

$$m - n = (2k + 1) - (2l + 1) = 2(k - l).$$

Portal da OBMEP

Novamente, $m + n$ e $m - n$ (caso $m \geq n$) também são números pares.

Suponha, agora, que m e n têm paridades distintas, digamos m par e n ímpar (o caso m ímpar e n par é análogo). Então, devem existir naturais k e l tais que $m = 2k$ e $n = 2l + 1$. Nesse caso, temos

$$m + n2k + (2l + 1) = 2(k + l) + 1$$

e (caso $m > n$)

$$m - n = 2k - (2l + 1) = 2(k - l - 1) + 1.$$

Logo, $m+n$ e $m-n$ (caso $m > n$) são ambos ímpares. □

A seguir, exercitamos os conceitos de números par e ímpar apresentando mais alguns exemplos.

Exemplo 8. *Dados m e n inteiros, mostre que $m \cdot n$ é par se, e somente se, m ou n é par.*

Solução. Começamos observando que é suficiente mostrar as duas afirmações a seguir:

(i) Se m ou n é par, então $m \cdot n$ é par.
(ii) Se m e n são ímpares, então $m \cdot n$ é ímpar.

Para o caso (i) suponha, sem perda de generalidade, que m é par. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$ e, daí,

$$m \cdot n = (2k) \cdot n = 2(kn).$$

Logo, $m \cdot n$ é par.

Para o caso (ii), se m e n são ambos ímpares, então existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $m = 2k + 1$ e $n = 2l + 1$. Segue que

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (2k+1)(2l+1) \\ &= 4kl + 2k + 2l + 1 \\ &= 2(2kl + k + l) + 1, \end{aligned}$$

e $m \cdot n$ é ímpar. □

Exemplo 9. *Se n é um número natural qualquer, qual dos números a seguir é sempre ímpar?*

(a) $n^2 - n + 2$.

(b) $n^2 + n + 2$.

(c) $n^2 + n + 5$.

(d) $n^2 + 5$.

(e) $n^3 + 5$.

Solução. É imediato verificar, a partir do Exemplo 8, que n^2 e n sempre têm a mesma paridade. Então, duas aplicações do Exemplo 7 garantem que n^2+n+2 e n^2-n+2 sempre são ambos números pares, ao passo que $n^2 + n + 5$ sempre é um número ímpar.

Por outro lado, n^2 e n^3 são pares se n é par, e ímpares se n é ímpar. Logo, $n^2 + 5$ e $n^3 + 5$ são ímpares se, e só se, n é par.

A resposta correta é, então, o item (c). □

Exemplo 10. *Em um quartel existem 500 soldados. Todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que, após certo tempo, um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?*

Solução. Suponha que haja um soldado, digamos João, que trabalhou com os demais exatamente uma vez. Então, os soldados restantes foram divididos em pares de forma tal que João trabalhou, em cada noite, com um desses pares de soldados, sem repetir um mesmo par. Por outro lado, excluindo-se João do rol dos 500 soldados, restam 499 soldados, que é um número ímpar. Chegamos, pois, a uma contradição, que deve ser interpretada como significando que não pode existir um soldado que tenha trabalhado com cada um dos demais exatamente uma vez. □

Exemplo 11. *Considere a sequência dos números naturais de 1 até 10, nessa ordem:*

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10.$$

É possivel pôr um dos sinais $+$ ou $-$ antes de cada um desses números de modo que a soma resultante seja 0?

Solução. Suponha que fosse possível pôr um dos sinais $+$ ou $-$ antes de cada um dos números acima de modo que a soma resultasse em 0, então poderíamos separar os números dados em dois grupos, os precedidos do sinal $+$ e os precedidos do sinal $-$, de forma que as somas dos números em cada grupo fossem iguais. Sendo a o valor comum dessas somas, teríamos

$$1 + 2 + \cdots + 10 = 2a,$$

um número par. Por outro lado, um cálculo simples nos dá

$$1 + 2 + \cdots + 10 = 55,$$

um número ímpar. Como chegamos a uma contradição, concluímos que não é possível fazer o arranjo pedido de sinais. □

Exemplo 12. *Fernando comprou um caderno com 200 folhas, com páginas numeradas de 1 a 400, em ordem crescente. Gabriel, um colega de classe, arrancou aleatoriamente 15 folhas do caderno e somou os 30 números que estavam escritos nessas folhas. É possível que a soma obtida por Gabriel tenha sido 2016?*

Portal da OBMEP

Solução. Observe que a numeração das páginas é em ordem crescente. Então, a primeira folha contém as páginas 1 e 2, a segunda folha contém as páginas 3 e 4, e assim por diante. Como Gabriel arrancou 15 folhas e somou os números das mesmas, das 30 parcelas da soma que ele efetuou 15 eram números pares e 15 eram números ímpares. Mas, pelo que foi discutido no Exemplo 7, a soma das 15 parcelas pares era um número par e a soma das 15 parcelas ímpares era um número ímpar. Então, a soma das 30 parcelas era a soma de um par com um ímpar, logo, um número ímpar. Portanto, essa soma não pode ter sido igual a 2016. □

4 O princípio das gavetas

Nesta seção, apresentaremos uma série de exemplos cujas soluções utilizam o **Princípio das Gavetas**, também conhecido como o **Princípio das Casas dos Pombos**. Tal princípio, apesar da sua apresentação elementar e de fácil entendimento, constitui uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas de contagem. A seguir, enunciamos sua forma mais elementar.

Se $n+1$ objetos (pombos) são colocados em n gavetas (casas), então há pelo menos uma gaveta (casa) que contém pelo menos dois objetos (pombos).

Um momento de reflexão nos convencerá da validade dessa afirmação. Realmente, se a conclusão não fosse verdadeira, então cada uma das n gavetas conteria no máximo um objeto. Mas, se assim fosse, teríamos no máximo

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=n$$

objetos ao todo, o que não é o caso.

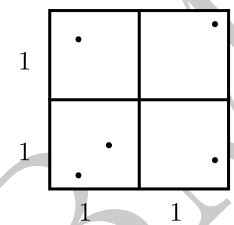
O argumento do parágrafo anterior também deixa claro que $n+1$ é a quantidade mínima de objetos que devemos ter para que possamos garantir a existência de pelo menos uma gaveta com mais de um objeto. De fato, se dispusermos de n objetos para distribuir em n gavetas, podemos pôr um objeto em cada gaveta, de forma que nenhuma delas conterá mais de um objeto.

Exemplo 13. *Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos a garantia de que pelo menos duas delas aniversariam em um mesmo mês do ano?*

Solução. Pensando os doze meses do ano como gavetas, a discussão que precede o exemplo garante que 13 é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que possamos garantir que pelo menos duas delas aniversariam em um mesmo mês. □

Exemplo 14. *Considere cinco pontos em um quadrado de lado 2cm. Mostre que, independentemente da maneira pela qual os pontos estejam dispostos, sempre existem pelo menos dois deles que distam um do outro de no máximo $\sqrt{2}$cm.*

Solução. Podemos dividir o quadrado de lado 2cm em quatro quadrados de lado 1cm cada, conforme ilustrado na figura abaixo. Agora, pensando os quadrados menores como sendo as gavetas e os cinco pontos dados como sendo os objetos a serem postos nas gavetas, o Princípio das Gavetas garante que deve existir pelo menos dois pontos em algum dos quadrados menores. Mas, se isso acontece, então



a distância entre esses dois pontos é menor ou igual que a medida da diagonal do quadrado. Como os lados dos quadrados menores medem 1cm, o Teorema de Pitágoras garante que suas diagonais medem $\sqrt{2}$cm. □

Exemplo 15. *Mostre, que em qualquer grupo de 5 pessoas, há pelo menos duas que têm o mesmo número de amigos no grupo.*

Solução. Consideremos um grupo com 5 pessoas, digamos A, B, C, D, E.

Primeiramente, analisemos o caso em que há alguma pessoa que não possui amigos no grupo. Sem perda de generalidade, podemos supor que essa pessoa é A. Se A não tem amigos, então as outras 4 pessoas podem ter 1, 2 ou 3 amigos cada uma, pois nenhuma delas pode ter 4 amigos, uma vez que ninguém deve ser amigo de A. Considerando as gavetas como as possíveis quantidades de amigos (1, 2 ou 3) e as pessoas (B, C, D e E) como os objetos, segue do Princípio das Gavetas que pelo menos duas das quatro pessoas B, C, D ou E têm uma mesma quantidade de amigos no grupo.

A outra possibilidade é que todas as pessoas do grupo tenham pelo menos um amigo no grupo. Neste caso, cada uma delas pode ter 1, 2, 3 ou 4 amigos. Novamente aplicando o Princípio das Gavetas (sendo 1, 2, 3 e 4 as gavetas e A, B, C, D e E os objetos), temos que pelo menos duas das pessoas A, B, C, D ou E, têm uma mesma quantidade de amigos no grupo. □

Para os dois próximos exemplos, lembre-se de que na divisão de um natural m por outro natural n há n restos possíveis: 0, 1, 2, …, $n-1$; por exemplo, na divisão de um natural por 100, os possíveis restos são 0, 1, 2, …, 99. Em particular, m é um múltiplo de n exatamente quando o resto da divisão de m por n é igual a 0. Também, se m

Portal da OBMEP

e m' são naturais que deixam um mesmo resto na divisão por n, então $m - m'$ é um múltiplo de n. De fato, sendo r o resto das divisões de m e m' por n, podemos escrever

$$m = nq + r \ \text{ e } \ m' = nq' + r,$$

em que q e q' são os quocientes das divisões. Logo,

$$m - m' = (nq + r) - (nq' + r) = n(q - q'),$$

que é um múltiplo de n.

Exemplo 16. *Mostre que, em todo conjunto de* 101 *números naturais, há dois desses números cuja diferença é um múltiplo de* 100.

Solução. Olhemos para cada um dos possíveis restos na divisão por 100 (i.e., 0, 1, 2, ..., 99) como gavetas, e distribuamos os 101 números dados nas gavetas de acordo com seus restos por 100 (por exemplo, se um dos 101 números dados for 567, que deixa resto 67 na divisão por 100, então colocamos 567 na gaveta 67; se outro dos 101 números for 800, que deixa resto 0 quando dividido por 100, colocamo-lo na gaveta 0, e assim por diante).

Como temos 101 números (objetos) distribuídos em 100 gavetas, o Princípio das Gavetas nos diz que há pelo menos dois desses 101 números que estão em uma mesma gaveta, isto é, que têm um mesmo resto quando divididos por 100. Portanto, a sua diferença é um múltiplo de 100. □

Exemplo 17. *Dado um número natural n, mostre que existe um múltiplo de n escrito somente com os algarismos* 0 *e* 1.

Prova. Apliquemos o Princípio das Gavetas, considerando os restos $0, 1, 2, \ldots, n-1$ como as gavetas. Como no exemplo anterior, colocamos um número na gaveta r se seu resto na divisão por n for igual a r.

Como há n gavetas, ao distribuirmos os $n + 1$ números

$$1, 11, 111, 1111, \ldots, \underbrace{1111\ldots11}_{n+1 \text{ algarismos}}$$

nas n gavetas, haverá pelo menos dois números em uma mesma gaveta. Então, esses dois números deixam um mesmo resto quando divididos por n. Portanto, a discussão que precedeu o enunciado do exemplo anterior garante que a diferença entre esses dois números é um múltiplo de n. Por outro lado, como os dois números em questão têm somente algarismos 1, é claro que sua diferença (que é não nula, pois os números são distintos) é formada apenas pelos algarismos 0 e 1. □

Enunciamos abaixo uma segunda versão do Princípio das Gavetas, que generaliza a versão que foi apresentada acima. Antes, porém, definimos a **parte inteira** de um número real x, e a denotamos por $\lfloor x \rfloor$, como o maior número inteiro menor do que ou igual a x. Em símbolos matemáticos, temos:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}.$$

Por exemplo, como $\pi \cong 3,14$ (com dois algarismos decimais corretos), concluímos que 3 é o maior inteiro menor ou igual a π, e podemos escrever $\lfloor \pi \rfloor = 3$; da mesma forma, como 2 é o maior inteiro menor ou igual a 2, também temos $\lfloor 2 \rfloor = 2$. Observe ainda que, se $\lfloor x \rfloor = q$, com q natural, então $q \leq x < q + 1$.

A generalização do Princípio das Gavetas é como segue:

> Se m objetos são colocados em n gavetas, então há pelo menos uma gaveta que contém pelo menos $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ objetos.

Para ver porque a afirmação acima é verdadeira, escreva $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = q$, de forma que $\frac{m}{n} \geq q$ ou, o que é o mesmo, $m \geq nq$. Suponha, agora, que cada gaveta contivesse no máximo $q - 1$ objetos. Então, o total de objetos seria no máximo

$$n(q - 1) = nq - n < nq \leq m,$$

o que é uma contradição.

Por outro lado, se dispusermos de nq objetos para distribuir em n gavetas, podemos pôr q objetos em cada gaveta, e nenhuma gaveta conterá $n + 1$ objetos. Isso garante que $nq + 1$ é a quantidade mínima de objetos para que se possa garantir a existência de uma gaveta com pelo menos $q + 1$ objetos.

Exemplo 18. *Qual menor número de pessoas que devemos reunir para que tenhamos a garantia de que pelo menos quatro delas aniversariem em um mesmo mês do ano?*

Solução. Mais uma vez pensando os 12 meses do ano como gavetas, o parágrafo anterior garante que $3 \cdot 12 + 1 = 37$ é o número mínimo de pessoas para que se possa garantir que pelo menos quatro delas aniversariem no mesmo mês. □

Exemplo 19. *Uma urna contém* 10 *bolas pretas,* 10 *bolas vermelhas,* 10 *bolas amarelas,* 10 *bolas verdes e* 10 *bolas azuis. Qual o menor número de bolas que devem ser retiradas para que tenhamos* 7 *bolas de uma mesma cor?*

Solução. Pensando as cores como as gavetas e as bolas que estão na urna como os objetos, e utilizando novamente a discussão que precedeu o exemplo anterior, concluímos que o número mínimo de bolas que devem ser retiradas da urna para que tenhamos a garantia de que 7 delas tenham uma mesma cor é $6 \cdot 5 + 1 = 31$. □

Essa segunda versão do Princípio das Gavetas admite uma ampla variedade de aplicações interessantes. Aqui, entretanto, limitamo-nos a discutir dois exemplos bastante simples. Para uma ampla gama de exemplos mais difíceis,

Portal da OBMEP

o leitor pode consultar as sugestões de leitura complementar, especialmente [1] e [2].

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas uma sessão de 50min para discutir as Seções 1 e 2, e uma sessão de 50min para cada uma das Seções 4 e 3. Na Seção 1, procure explicar com cuidado a definição de sucessor, de modo que os alunos entendam que essa definição tem um papel importante na organização dos números naturais. Na Seção 4, ressalte o uso do Princípio das Gavetas nos exemplos abordados. Ainda nessa seção, procure explicar com um cuidado maior a definição de parte inteira de um número real, pois o entendimento da segunda versão do Princípio das Gavetas depende disso. Finalmente, na Seção 3, ao explicar os conceitos de números pares e ímpares, procure dar uma atenção especial aos resultados que versam sobre a soma e o produto de números pares e ímpares.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 4: Combinatória*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016.

2. D. Fomin, S. Genkin e I. Itenberg. *Mathematical World, Vol. 8: Mathematical Circles (Russian Experience)*. AMS, 1996.

3. E. Lima. *Análise Real, Vol.1*. Rio de Janeiro, SBM, 1993.

4. A. C. Morgado, J. B. P. de Carvalho, P. C. P. Carvalho e P. J. Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, SBM, 2004.

Portal da OBMEP