Material Teórico - Módulo Desigualdades Elementares

Desigualdades Elementares - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de setembro de 2019

1 Desigualdades elementares

Ao longo deste material, discutiremos o caso geral da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, e também faremos algumas aplicações dessa desigualdade. Para iniciar, vamos recordar o caso particular que foi apresentado no final da aula anterior: se x e y são números reais positivos quaisquer, então

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \tag{1}$$

Na desigualdade acima, $\frac{x+y}{2}$ e $\sqrt{xy}$ são denominadas, respectivamente, média aritmética e média geométrica dos reais positivos x e y. Generalizando esses conceitos, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos quaisquer. Definimos a **média aritmética** de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como o número real positivo

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Também, definimos a **média geométrica** de x_1, x_2, $\ldots$, x_n como o real positivo

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

A seguir, apresentamos o caso geral do resultado conhecido como a *desigualdade entre as médias aritmética e geométrica*[1]:

Teorema 1. *A média aritmética dos números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é maior do que ou igual à sua média geométrica, ou seja,*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{2}$$

*Além disso, vale a igualdade em (**??**) se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Inicialmente, demonstraremos um caso particular do teorema, qual seja, aquele em que a média geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é igual a 1. O caso geral seguirá como consequência.

Lema 2. *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos tais que $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, então*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Prova. Utilizaremos o princípio de indução finita sobre n, para $n \geq 2$.

Se x_1 e x_2 são reais positivos tais que $x_1 x_2 = 1$, utilizando o (já provado) caso particular da desigualdade das médias para $n = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \Longleftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} &\geq 1 \\ \Longleftrightarrow x_1 + x_2 &\geq 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Ademais, é claro que a igualdade é válida se, e somente se, $(x_1 - x_2)^2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2 = 1$.

Agora, seja $k \geq 2$ um inteiro positivo fixado. Assumimos que o resultado é válido para k números reais positivos com média geométrica igual a 1, e provaremos que ele também é válido para $k+1$ reais positivos com média geométrica também igual a 1.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ números reais positivos tais que $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1$. Devemos mostrar que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1.$$

Com efeito, primeiro note que, se todos os $k+1$ números $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ forem iguais a 1, o resultado segue trivialmente. Caso contrário, existe algum x_i tal que $x_i \neq 1$, de sorte que $x_i < 1$ ou $x_i > 1$. Se $x_i < 1$, então existe algum x_j, com $j \neq i$, tal que $x_j > 1$ (pois, se todos os demais números fossem menores ou iguais a 1, obteríamos $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} < 1$, o que não é o caso). Analogamente, se $x_i > 1$, então deve existir algum x_j, com $j \neq i$, tal que $x_j < 1$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $x_k > 1$ e $x_{k+1} < 1$. Fazendo $y_k = x_k x_{k+1}$, temos que

$$x_1 x_2 \ldots x_{k-1} y_k = x_1 x_2 \ldots x_{k-1}(x_k x_{k+1}) = 1.$$

Portanto, aplicando a hipótese de indução aos k reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_k$, obtemos $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + y_k \geq k$, isto é

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k.$$

Então, escrevendo $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}$, temos

$$\begin{aligned} S &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + y_k) + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \\ &\geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \\ &= (k+1) + (x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} - 1) \\ &= (k+1) + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) \\ &> k + 1. \end{aligned}$$

(Veja que a última desigualdade é verdadeira porque $x_k > 1$ e $x_{k+1} < 1$ implicam $(x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > 0$.) □

Antes de demonstrarmos o caso geral da desigualdade entre as médias, vejamos um exemplo no qual já podemos aplicar o caso particular discutido acima.

Exemplo 3 (Olimpíada Ibero-americana)**.** *Sejam x, y e z números reais positivos. Mostre que*

$$\frac{1}{x} \cdot (1 + xy) + \frac{1}{y}(1 + yz) + \frac{1}{z} \cdot (1 + xz) \geq 6.$$

[1] Apesar do nome, no caso $n \geq 3$ tal desigualdade não possui uma interpretação geométrica. Para a interpretação geométrica do caso $n = 2$, veja a primeira parte desse material.

Solução. Denotando $S = \frac{1}{x} \cdot (1 + xy) + \frac{1}{y}(1 + yz) + \frac{1}{z} \cdot (1 + xz)$, temos

$$S = \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} + x.$$

Além disso,

$$\frac{1}{x} \cdot y \cdot \frac{1}{y} \cdot z \cdot \frac{1}{z} \cdot x = 1.$$

Logo, utilizando o lema **??**, obtemos:

$$S \geq 6.$$

□

Voltemos, finalmente, à demonstração do caso geral.

Prova do caso geral de (??). Sejam $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ e y_1, y_2, …, y_n, os reais positivos definidos por $y_i = \frac{x_i}{n}$, para $1 \leq i \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n &= \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{G} \\ &= \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{G^n} \\ &= \frac{G^n}{G^n} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o lema **??** aos números y_1, y_2, …, y_n, obtendo

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geq n. \tag{4}$$

Mas,

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geq n &\iff \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \ldots + \frac{x_n}{G} \geq n \\ &\iff \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{G} \geq n \\ &\iff \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq G, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Finalmente, as equivalências acima mostram que a igualdade ocorre em (??) se, e somente se, tivermos a igualdade em (??). Por sua vez, o Lema **??** garante que esse é o caso se, e somente se, $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$. Mas, como

$$y_i = 1 \iff \frac{x_i}{G} = 1 \iff x_i = G,$$

concluímos que

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1 &\iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n = G \\ &\iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n. \end{aligned}$$

(Para a última passagem note que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ implica $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sqrt[n]{x_1^n} = x_1$.) □

Como primeira aplicação da desigualdade das médias, daremos uma outra demonstração para a proposição abaixo, a qual foi apresentada na primeira parte deste material.

Proposição 4. *Sejam x_1, x_2, …, x_n números reais positivos. Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2, \tag{5}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Prova. Aplicando a desigualdade entre as médias às sequências de números reais positivos x_1, x_2, …, x_n e $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, …, $\frac{1}{x_n}$ obtemos, respectivamente,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}},$$

valendo a igualdade (nos dois casos) se, e só se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Observando que $\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$ e multiplicando membro a membro as duas desigualdades acima, obtemos

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq 1,$$

ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2,$$

valendo a igualdade se, e só se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. □

Na demonstração da proposição **??**, obtivemos a desigualdade

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

Tomando inversos, temos então que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

com a igualdade ocorrendo se, e só se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

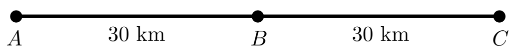
O número que aparece no lado esquerdo da última desigualdade acima é denominado **média harmônica** de x_1, x_2, …, x_n. Se denotamos as médias aritmética, geométrica e harmônica por MA, MG e MH, podemos sintetizar a discussão até aqui observando que

$$MA \geq MG \geq MH,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

O conceito de *média harmônica* pode ser melhor compreendido com o auxílio do exemplo a seguir e da discussão que o sucede.

Exemplo 5. *Suponha que a distância entre as cidades A e B seja igual a 30 km e que a distância entre as cidades B e C também seja igual a 30 km. Em uma manhã de domingo, Joaquim fez uma viagem de A até C, passando por B, utilizando o seu patinete. No primeiro trecho (de A até B) ele viajou a uma velocidade constante de 20 km/h e no segundo (de B a C) a uma velocidade constante de 30 km/h. Qual a velocidade média de Joaquim durante a viagem?*



Solução. É natural pensar que a velocidade média empregada por Joaquim no percurso é igual à média aritmética das velocidades empregadas nos dois trechos, uma vez que Joaquim percorreu 30 km em cada um deles. Assim, a resposta seria

$$\frac{20+30}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ km/h}.$$

Entretanto, sabemos que a velocidade média é o quociente entre a distância total percorrida e o tempo total gasto na viagem. Assim, o tempo total gasto é o quociente entre a distância percorrida e a velocidade média. Logo, no primeiro trecho o tempo gasto foi de $\frac{30}{30} = 1$ hora e no segundo $\frac{30}{20} = 1,5$ horas. Portanto, o tempo total gasto na viagem foi de $1 + 1,5 = 2,5$ horas. Concluímos, pois, que a velocidade média empregada por Joaquim foi de

$$\frac{60}{2,5} = 24 \text{ km/h}.$$

□

Mais geralmente, suponha que uma viagem de $2d$ quilômetros é dividida em dois trechos de d quilômetros cada, e sejam v_1 e t_1, respectivamente, a velocidade média e o tempo total gasto no primeiro trecho e v_2 e t_2, também respectivamente, a velocidade média e o tempo total gasto no segundo trecho. Se v é a velocidade média em todo o percurso, então

$$\begin{aligned} v &= \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} \\ &= \frac{2\cancel{d}}{\cancel{d}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}. \end{aligned}$$

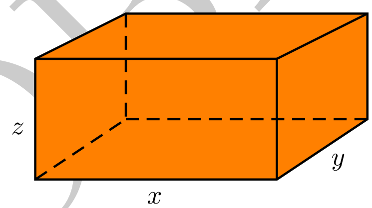
Dessa forma, concluímos que *a velocidade média é a média harmônica entre as velocidades médias nos dois percursos.*

Essa ideia pode ser estendida a um percurso com n trechos de d quilômetros cada. A velocidade média será a média harmônica das velocidades médias empregadas em cada trecho.

Voltando à desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, vejamos mais um exemplo ao qual ela pode ser aplicada com sucesso.

Exemplo 6. *Dentre todos os paralelepípedos reto retângulos que têm soma das medidas das 12 arestas igual a 60 cm, mostre que o cubo de aresta 5 cm é o que tem o maior volume.*

Solução. Se as dimensões de um paralelepípedo reto retângulo medem x, y e z centímetros e a soma das medidas de suas arestas é igual a 60 cm, então $4x + 4y + 4z = 60$, o que acarreta $x + y + z = 15$.



Por outro lado, o volume do paralelepípedo é igual a xyz. Então, utilizando a desigualdade entre as médias, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} &\iff \frac{15}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \\ &\iff 5 \geq \sqrt[3]{xyz} \\ &\iff 5^3 \geq xyz \\ &\iff xyz \leq 125, \end{aligned}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $x = y = z = 5$. Portanto, o paralelepípedo reto retângulo que possui volume máximo com as condições dadas é o cubo cuja aresta mede 5 cm. □

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir todo o conteúdo presente neste material. É importante que o professor mostre cada uma das desigualdades apresentadas com todos os detalhes, sempre ressaltando o argumento utilizado. Também é importante que os alunos percebam que o lema **??** é um caso particular da desigualdade entre as médias, pois esse tipo de argumento pode ser utilizado para resolver outros problemas.

As referências listadas a seguir contém outros problemas envolvendo a desigualdade entre as médias, bem como discutem outras desigualdades interessantes.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. Paulo Cezar Carvalho e Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro, SBM, 2015.