Material Teórico - Módulo Elementos básicos de geometria plana - Parte 3

Quadriláteros Inscritíveis e Circunscritíveis

Oitavo ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Jocelino Sato
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Quadriláteros inscritíveis

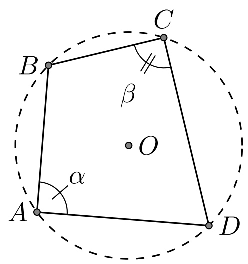
As configurações geométricas de inscrição e circunscrição de um polígono num círculo λ aparecem em várias figuras e ornamentos de objetos desde a antiguidade.

No caso de triângulos, a situação é bem definida e foi abordada quando estudamos os pontos notáveis de um triângulo (circuncentro e incentro de um triângulo). Uma situação mais geral será o objeto de estudo deste material, começando com a inscrição de quadriláteros.

Para quadriláteros, o teorema seguinte fornece condições necessárias e suficientes para inscrição em um círculo.

Teorema 1. *Um quadrilátero convexo é inscritível num círculo se, e somente se, seus pares de ângulos opostos são suplementares.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, e suponha que esse quadrilátero esteja inscrito num círculo $\lambda = C(O, r)$. Consideremos os ângulos opostos $\angle BCD$ e $\angle DAB$, respectivamente (veja a figura abaixo).



Eles subentendem os arcos $D\overset{\frown}{A}B$ e $B\overset{\frown}{C}D$, determinados pelos extremos comuns B e D e de medidas 2β e 2α, respectivamente, onde $\alpha = B\widehat{A}D$ e $\beta = B\widehat{C}D$.

Como a soma das medidas desses arcos é igual a $360°$, segue do Teorema do Ângulo Inscrito que

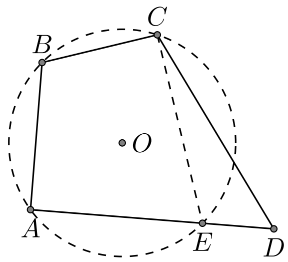
$$B\widehat{C}D + D\widehat{A}B = \alpha + \beta = \frac{360}{2} = 180°.$$

Portanto, os ângulos $\angle BCD$ e $\angle DAB$ são suplementares.

Reciprocamente, se os ângulos opostos $\angle DAB$ e $\angle BCD$ são suplementares, vamos mostrar que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível. Precisamente, está inscrito no único círculo que passa por três dos pontos A, B, C e D.

Uma vez que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é $360°$, concluímos que os ângulos opostos $\angle ABC$ e $\angle CDA$ também são suplementares. Tracemos o círculo λ que passa pelos pontos A, B e C. Temos três possibilidades para o ponto D: ele está no interior de λ, sobre λ ou no exterior de λ.

Suponhamos primeiramente que D esteja no exterior de λ, e seja E o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{AD}$ e λ. Como o quadrilátero $ABCE$ está inscrito em λ, a parte já demonstrada do teorema garante que os pares de ângulos opostos de $ABCE$ são suplementares; em particular, temos $A\widehat{B}C + C\widehat{E}A = 180°$.



Mas, por hipótese, temos também $A\widehat{B}C + C\widehat{D}A = 180°$, de sorte que

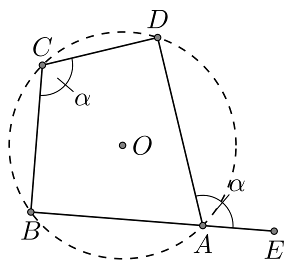
$$C\widehat{E}A = C\widehat{D}A.$$

Observe, então, que $\angle CEA$ é um ângulo externo do triângulo CED, de medida igual àquela do ângulo interno $\angle CDA$. Isso contradiz o Teorema do Ângulo Externo, e nos força a concluir que D não pode estar no exterior de λ.

Um raciocínio semelhante mostra que D também não está no interior de λ. Portanto, a única possibilidade que nos resta é D estar sobre λ e, assim, o quadrilátero $ABCD$ está inscrito em λ. □

A seguir, veremos mais dois conjuntos de condições necessárias e suficientes para um quadrilátero ser inscritível. O primeiro é uma consequência imediata do Teorema anterior e tem o seguinte enunciado:

Teorema 2. *Um quadrilátero convexo é inscritível num círculo se, e somente se, um ângulo externo e o ângulo interno oposto ao vértice desse ângulo externo são congruentes. Em símbolos (veja a figura abaixo), dado o quadrilátero convexo $ABCD$, se o ângulo externo $\angle EAD$ (E um ponto da semirreta $\overrightarrow{BA}$) e o ângulo interno $\angle BCD$ (oposto ao vértice A) são congruentes, então o quadrilátero é inscritível. Reciprocamente, se $ABCD$ é inscritível, então o ângulo externo $\angle EAD$ e o ângulo interno $\angle BCD$ são congruentes.*



Prova. Observe inicialmente que, como $B\widehat{A}D + D\widehat{A}E = 180°$, temos

$$\begin{aligned} B\widehat{A}D + B\widehat{C}D = 180° &\Leftrightarrow B\widehat{C}D = 180° - B\widehat{A}D \\ &\Leftrightarrow B\widehat{C}D = D\widehat{A}E. \end{aligned}$$

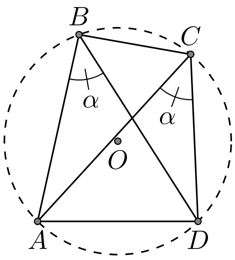
Agora, basta aplicar o teorema anterior. □

O segundo conjunto de condições tem um enunciado que, conforme veremos logo em seguida, permite sua aplicação de forma bastante eficiente em muitas situações.

Teorema 3. *Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, o ângulo formado por um lado e uma diagonal é igual ao ângulo formado pelo lado oposto e pela outra diagonal.*

Prova. Seja $ABCD$ um quadrilátero com lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

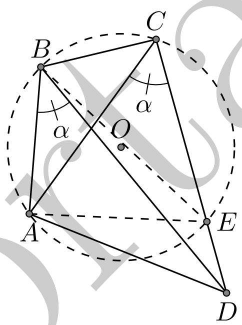
Inicialmente, suponha que esse quadrilátero esteja inscrito num círculo $\lambda = C(O, r)$ (veja a figura abaixo).



Consideremos os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ determinados cada um deles por um lado e uma diagonal. Uma vez tais ângulos que subentendem o mesmo arco $\overset{\frown}{AD}$ do círculo circunscrito, o Teorema do Ângulo Inscrito garante que eles possuem a mesma medida: $A\widehat{B}D = \alpha = D\widehat{C}A$.

Reciprocamente, suponha que o ângulo $\angle ABD$, formado pelo lado $\overline{AB}$ e pela diagonal $\overline{BD}$, e o ângulo $\angle ACD$, formado pelo lado $\overline{CD}$ e pela diagonal $\overline{AC}$, possuem a mesma medida α. Vamos mostrar que $ABCD$ está inscrito no círculo λ que passa pelos pontos A, B e C (veja a figura abaixo). Para tanto, temos três possibilidades para o ponto D: ele está no interior de λ, sobre λ ou no exterior de λ.

Suponha primeiramente que D esteja no exterior de λ, e seja E o ponto de interseção de $\overrightarrow{CD}$ e λ (veja novamente a figura abaixo).



Como o quadrilátero $ABCE$ está inscrito em λ, a parte já demonstrada do teorema garante que $A\widehat{B}E = A\widehat{C}E$. Por outro lado, segue de E pertencer a CD e de nossa hipótese que

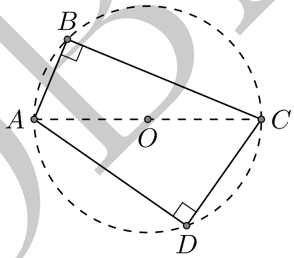
$$A\widehat{C}E = A\widehat{C}D = \alpha = A\widehat{B}D.$$

Logo, $A\widehat{B}E = A\widehat{B}D$ e, pela construção de ângulo, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD}$. Mas, como D e E pertencem a $\overline{CD}$, devemos ter $D = E \in \lambda$, o que é uma contradição.

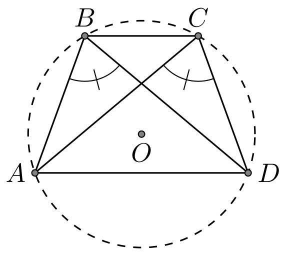
Um raciocínio semelhante mostra que D também não está no interior de λ. Portanto, D está sobre λ e, assim, o quadrilátero $ABCD$ está inscrito em λ. $\square$

Finalizamos esta seção com as seguintes observações.

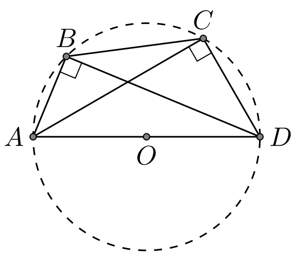
1. Qualquer um dos Teorema 1, 2 ou 3 garante que todo quadrado e todo retângulo é um quadrilátero inscritível. De forma mais geral, se uma das diagonais de um quadrilátero convexo o divide em dois triângulos retângulos tendo tal diagonal como hipotenusa comum, então o quadrilátero convexo é inscritível (veja a figura a seguir).



2. Dado um trapézio isósceles $ABCD$ de bases AD e BC, mostramos no Teorema 3 do material sobre quadriláteros que os triângulos ABD e DCA são congruentes. Logo, $A\widehat{B}D = D\widehat{C}A$, e o Teorema 3 garante que todo trapézio isósceles é um quadrilátero inscritível (veja a figura abaixo).



3. Um quadrilátero convexo $ABCD$ é inscritível em um semicírculo de diâmetro $\overline{AD}$ se, e somente se, $A\widehat{B}D = A\widehat{C}D = 90°$ (veja a figura a seguir).



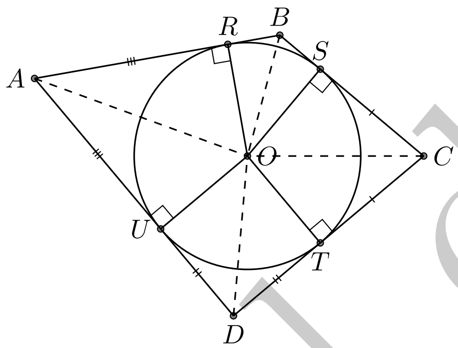
Uma justificativa desse resultado pode ser feita usando o Teorema 3 e observando que um triângulo é retângulo se, e somente se, está inscrito em um semicírculo. Deixamos os detalhes dessa justificativa para o leitor.

2 Quadriláteros circunscritíveis

Como ocorreu com o problema da inscrição de quadriláteros, estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja circunscritível. O resultado a seguir é usualmente creditado ao matemático grego Pitot.

Teorema 4 (Pitot). *Um quadrilátero convexo pode ser circunscrito a um círculo se, e somente se, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados opostos.*

Prova. Suponha que o quadrilátero convexo $ABCD$ esteja circunscrito ao círculo $\lambda = C(0, r)$, e sejam R, S, T e U os pontos de tangência com λ dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente (veja a figura a seguir).

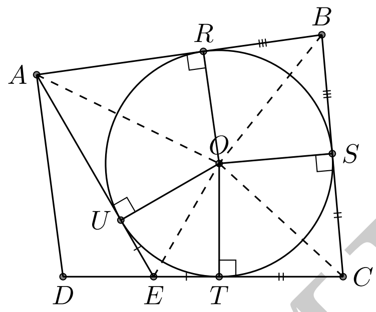


Usando o Teorema 5 do material *Círculos: Elementos, Arcos e Ângulos Inscritos*, podemos escrever $AR = AU$, $BR = BS$, $CS = CT$ e $DT = DU$. Assim,

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AR + BR) + (CT + DT) \\ &= (AU + BS) + (CS + DU) \\ &= (AU + DU) + (BS + CS) \\ &= AD + BC. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $ABCD$ é um quadrilátero convexo para o qual $AB + CD = AD + BC$, vamos mostrar que $ABCD$ pode ser circunscrito no único círculo λ que tangencia os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ do quadrilátero.

Para tanto, sejam R, S e T, respectivamente, os pontos de tangência de λ com $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ (veja a próxima figura).



Suponha, por absurdo, que $ABCD$ não seja circunscritível a λ. Então, se E é o ponto de interseção de $\overrightarrow{CD}$ com a tangente a λ passando por A, temos que $DE \neq 0$ e o quadrilátero convexo $ABCE$ está circunscrito a λ. Segue, pois, da parte já demonstrada que $AB + CE = AE + BC$. Além disso, por hipótese temos $AB + CD = AD + BC$, de forma que

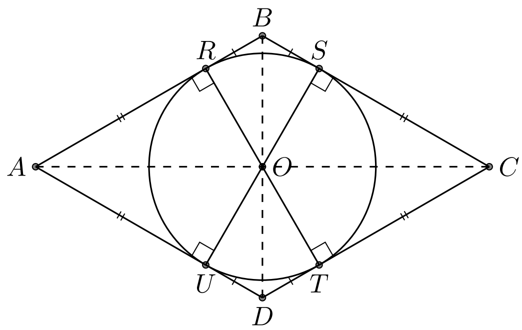
$$\begin{aligned} AD + BC &= AB + CD = AB + (CE \pm ED) \\ &= (AB + CE) \pm ED \\ &= (AE + BC) \pm ED. \end{aligned}$$

(Utilizamos o sinal $+$ se, como na figura acima, E estiver sobre o segmento $\overline{CD}$; utilizamos o sinal $-$ se D estiver sobre o segmento $\overline{CE}$ – faça uma figura correspondente a esse caso.) Cancelando BC da primeira e última expressões acima, obtemos

$$AD = AE \pm ED,$$

o que contradiz a Desigualdade Triangular aplicada ao triângulo ADE. Portanto, o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível a λ. □

Observe que, como decorrência imediata do Teorema de Pitot, concluímos que todo losango $ABCD$ (e, em particular, todo quadrado) é circunscritível (veja a figura abaixo).



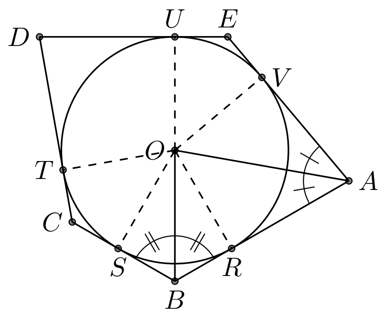
3 O caso geral dos polígonos

Quando todos os lados de um polígono convexo forem tangentes a um círculo $\lambda = C(O, r)$, é possível mostrar que λ está contido no interior do polígono. Nesse caso, diremos que **o polígono está circunscrito a** λ e que λ **está inscrito no polígono**.

Como os lados do polígono tangenciam λ em *pontos que estão a uma mesma distância r do centro O*, as bissetrizes dos ângulos internos do polígono concorrem em O. Por exemplo, nas notações da figura a seguir, a caracterização da bissetriz como lugar geométrico garante que

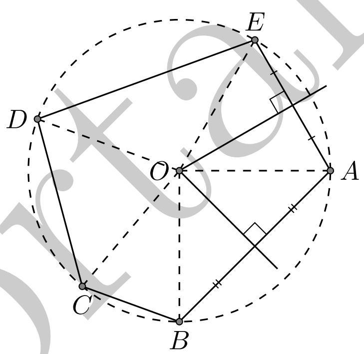
$$OR = OS \Rightarrow R\widehat{B}O = S\widehat{B}O \Rightarrow C\widehat{B}O = A\widehat{B}O.$$

Uma vez que O é unicamente determinado, concluímos que o círculo λ é também único, sendo denominado o **círculo inscrito no polígono**. Veja que λ fica completamente determinado por três de seus pontos de tangência com os lados do polígono!



A situação *dual* é aquela de um polígono convexo cujos vértices estão situados sobre um círculo $\lambda = C\,(O, r)$ (veja a próxima figura). Nesse caso, dizemos que **o polígono está inscrito em** λ e que λ **está circunscrito ao polígono**.

Uma vez que todos os vértices do polígono estão situados a uma mesma distância r do centro O, a caracterização da mediatriz como lugar geométrico garante que as mediatrizes dos lados do polígono concorrem em O, sendo este ponto denominado o *centro do círculo circunscrito ao polígono*. Observe que λ fica completamente determinado por três vértices do polígono!



Conforme mostraremos agora, polígonos regulares são sempre inscritíveis e também sempre circunscritíveis, e os centros dos círculos inscrito e circunscrito coincidem.

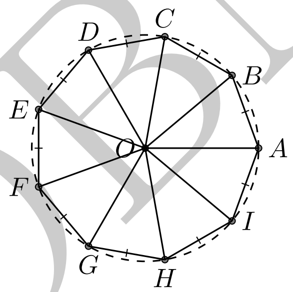
Teorema 5. *Se $\mathcal{P} = ABCDEF\ldots$ é um polígono regular de n lados, então:*

(a) $\mathcal{P}$ é inscritível em um círculo.

(b) $\mathcal{P}$ é circunscritível a um círculo.

(c) Os círculos inscrito e circunscrito a $\mathcal{P}$ são concêntricos.

Prova.
(a) Sem perda de generalidade, podemos supor $n > 3$. Sejam $ABCDEF...$ um polígono regular e $\lambda = C\,(O, r)$ o único círculo que passa pelos pontos não colineares A, B e C, os quais são vértices consecutivos de $\mathcal{P}$. Conforme sugere a figura a seguir, mostraremos que λ também passa pelos demais vértices do polígono.



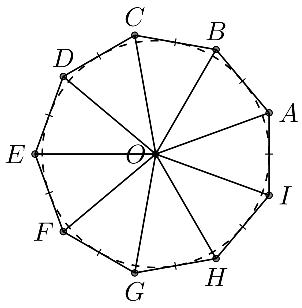
Para tanto, observe inicialmente que, como $OB = OC = r$, o triângulo OBC é isósceles e, portanto, $O\widehat{B}C = O\widehat{C}B$. Além disso, como os ângulos internos de um polígono regular são congruentes, temos

$$O\widehat{B}A = A\widehat{B}C - O\widehat{B}C = B\widehat{C}D - O\widehat{C}B = O\widehat{C}D.$$

Agora, como $AB = CD$ (por serem ambos lados de um polígono regular), $OB = OC$ e $O\widehat{B}A = O\widehat{C}D$, o caso LAL garante que os triângulos OAB e ODC são congruentes. Daí temos $OD = OA$, e isso mostra que D também pertence ao círculo λ.

Por fim, como o mesmo argumento pode ser repetido, sucessivamente, para mostrar que E, F, ... são pontos de λ e, assim, temos que $\mathcal{P}$ está inscrito em λ.

(b) Novamente sem perda de generalidade, podemos supor $n > 3$. Sejam $ABCDEF...$ um polígono regular e $\lambda = C(O; r)$ o círculo *circunscrito* a $\mathcal{P}$, construído como em (a). Então, os triângulos OAB, OBC, OCD, ODE etc são todos isósceles (pois $OA = OB = OC = \ldots = r$) e congruentes (pois $AB = BC = CD = \ldots$). Portanto, as distâncias de O aos lados AB, BC, CD etc também são todas iguais. Denotemos por r' o seu valor comum, a noção de distância e o Teorema 1 do material Círculos: Elementos, Arcos e Ângulos Inscritos, garantem que esses lados são tangentes ao círculo $\lambda' = C(O; r')$, ou seja, λ' é inscrito em $\mathcal{P}$. (Na figura abaixo, λ' é o círculo pontilhado.)



(c) A demonstração do item (b) mostrou que os círculos inscrito e circunscrito têm um mesmo centro. $\square$

Graças ao teorema anterior, diremos que o centro comum dos círculos inscrito e circunscrito a um polígono regular é o **centro do polígono**. Observamos ainda que, quando o número de lados de um polígono regular é par, seu centro é um *centro de simetria do polígono*.

No caso de polígonos convexos não regulares com número de lados maior do que 4, não temos conjuntos de *condições suficientes* para a inscrição ou circunscrição em um círculo.

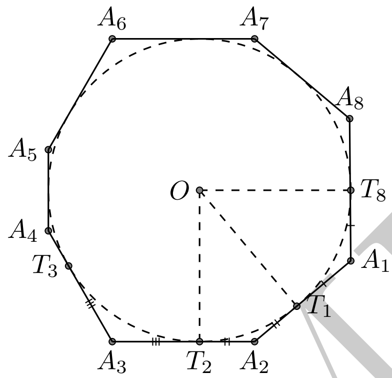
Entretanto, no caso de polígonos convexos com um número par de lados, temos conjuntos de *condições necessárias* para a inscrição e circunscrição num círculo, as quais generalizam aquelas apresentadas para quadriláteros.

Comecemos examinando o caso da circunscrição de um polígono a um círculo.

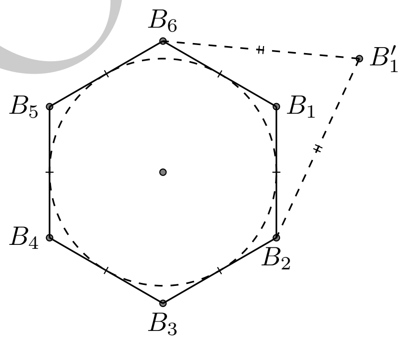
Teorema 6. *Seja $\mathcal{P} = A_1A_2A_3 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$ um polígono convexo de $2n$ lados ($n \geq 2$). Se $\mathcal{P}$ está circunscrito a um círculo $\lambda = C\,(O, r)$, então a soma das medidas dos n lados de $\mathcal{P}$, tomados de forma alternada e consecutivamente, é igual à soma das medidas dos n lados restantes. Em símbolos, sendo $l_i = A_iA_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, e $l_{2n} = A_{2n}A_1$, tem-se*

$$\sum_{k=1}^{n} l_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} l_{2k}. \tag{1}$$

A demonstração do teorema a seguir é bastante similar àquela do Teorema de Pitot e, por isso, será deixada como exercício para o leitor. A título de sugestão, a figura a seguir ilustra um polígono convexo não regular $A_1A_2 \ldots A_8$, circunscritível. Nela, observe que, sendo T_1 e T_2 os pontos de tangência do círculo inscrito com os lados A_1A_2 e A_2A_3, respectivamente, temos $A_2T_1 = A_2T_2$. Da mesma forma, $A_1T_8 = A_1T_1$ e $A_3T_2 = A_3T_3$. Tais igualdades, adicionadas membro a membro convenientemente, fornecem a demonstração desejada.



Segue do Teorema acima que, se para um polígono convexo $\mathcal{P} = B_1B_2B_3 \ldots B_{2n-1}B_{2n}$ a igualdade (1) não é satisfeita, então $\mathcal{P}$ não é circunscritível. Por outro lado, se tal igualdade for satisfeita, $\mathcal{P}$ não necessariamente será um polígono circunscritível. Por exemplo, a figura a seguir mostra um polígono regular (logo, circunscritível) $\mathcal{P} = B_1B_2B_3B_4B_5B_6$; tomando um ponto B_1' sobre a mediatriz de B_2B_6 e distinto de B_1, temos que $\mathcal{Q} = B_1'B_2B_3B_4B_5B_6$ não é circunscritível, ainda que os comprimentos de seus lados também satisfaçam uma relação do tipo (1).



No caso de inscrição de polígonos convexos não regulares, podemos enunciar o seguinte resultado geral.

Teorema 7. *Seja $\mathcal{P} = A_1A_2A_3 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$ um polígono convexo de $2n$ lados, $n \geq 2$, e sejam $\alpha_i = A_{2i-1}\widehat{A}_{2i}A_{2i+1}$ e $\beta_i = A_{2i-2}\widehat{A_{2i-1}}A_{2i}$ as medidas dos ângulos internos de $\mathcal{P}$ com vértices no pontos A_{2i} e A_{2i-1}, respectivamente, para $i = 1, 2, \ldots, n$ (com a convenção de que $\alpha_n = A_{2n-1}\widehat{A}_{2n}A_1$ e $\beta_1 = A_{2n}\widehat{A}_1A_2$). Se $\mathcal{P}$ está inscrito num círculo $\lambda = C\,(O, r)$, então:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 180^\circ\,(n-1)\,. \tag{2}$$

e

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 180^\circ\,(n-1)\,.$$

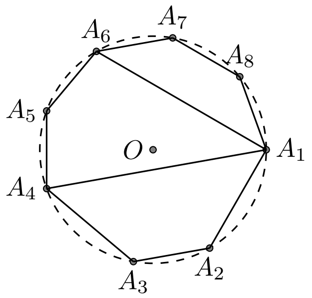
Prova. Inicialmente, observe que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

é a soma de todos os ângulos de $\mathcal{P}$, logo, igual a $180^\circ(2n-2)$ (lembre-se de que o polígono tem $2n$ lados!). Portanto, se já tivermos a validade de (2), seguirá que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\beta_i &= 180^\circ(2n-2)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\\ &= 180^\circ(2n-2)-180^\circ(n-1)\\ &= 180^\circ(n-1).\end{aligned}$$

Para o que falta, consideremos o caso de um polígono convexo $\mathcal{P} = A_1A_2A_3\ldots A_7A_8$, inscritível (a demonstração do caso geral resulta completamente análoga). Qualquer escolha de quatro dos vértices de $\mathcal{P}$ determina um quadrilátero convexo inscritível, para o qual podemos aplicar os resultados de inscrição já vistos. Assim (veja a figura abaixo), fixando o vértice A_1 e considerando a decomposição de $\mathcal{P}$ nos quadriláteros $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_4A_5A_6$ e $A_1A_6A_7A_8$, obteremos a prova do Teorema.



Como o quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ está inscrito em λ, vale a igualdade:

$$180^\circ = A_1\widehat{A_2}A_3 + A_3\widehat{A_4}A_1.$$

O quadrilátero $A_1A_4A_5A_6$ também está inscrito em λ, de modo que:

$$180^\circ = A_1\widehat{A_4}A_5 + A_5\widehat{A_6}A_1.$$

Finalmente, o quadrilátero $A_1A_6A_7A_8$ está inscrito em λ. Logo, temos:

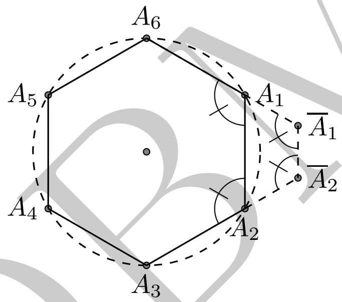
$$180^\circ = A_1\widehat{A_6}A_7 + A_7\widehat{A_8}A_1.$$

Somando membro a membro as três igualdades acima e reagrupando as parcelas, obtemos

$$\begin{aligned}180^\circ\,(4-1) &= \left(A_1\widehat{A_2}A_3 + A_3\widehat{A_4}A_1\right) + \left(A_1\widehat{A_4}A_5 + A_5\widehat{A_6}A_1\right)\\ &\quad + \left(A_1\widehat{A_6}A_7 + A_7\widehat{A_8}A_1\right)\\ &= A_1\widehat{A_2}A_3 + \left(A_3\widehat{A_4}A_1 + A_1\widehat{A_4}A_5\right)\\ &\quad + \left(A_5\widehat{A_6}A_1 + A_1\widehat{A_6}A_7\right) + A_7\widehat{A_8}A_1\\ &= A_1\widehat{A_2}A_3 + A_3\widehat{A_4}A_5 + A_5\widehat{A_6}A_7 + A_7\widehat{A_8}A_1\\ &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4.\end{aligned}$$

□

Segue do teorema anterior que, se para um polígono convexo $\mathcal{P} = A_1A_2A_3\ldots A_{2n-1}A_{2n}$ a igualdade (2) não é satisfeita, então $\mathcal{P}$ não é inscritível. Por outro lado, se ela é satisfeita, $\mathcal{P}$ não é necessariamente um polígono inscritível. Por exemplo, na figura a seguir, $\mathcal{P} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ é regular e, portanto inscritível; entretanto, se $\overleftrightarrow{A_1'A_2'} \parallel \overleftrightarrow{A_1A_2}$, então $\mathcal{Q} = A_1'A_2'A_3A_4A_5A_6$ não é inscritível mas satisfaz (2) (uma vez que o paralelismo entre $\overleftrightarrow{A_1'A_2'}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ garante que as medidas dos ângulos internos de $\mathcal{Q}$ também são todas iguais).



Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em dois encontros de 50 minutos cada. O estudo das justificativas dos resultados desse tópico é uma excelente oportunidade para rever a teoria sobre arcos e ângulos num círculo e, portanto, deve ser incentivado. Conforme será visto mais adiante, observamos que as configurações de inscrição e circunscrição de um polígono num círculo permitem estabelecer relações métricas envolvendo o círculo λ, relações estas que têm aplicações em vários contextos práticos. Assim, o professor pode fazer algumas escolhas, dentro desse contexto, e apresentá-las como aplicações.

A referência [2] contém vários exercícios simples envolvendo inscrição e circunscrição de quadriláteros e, mais geralmente, polígonos convexos. A referência [1] traz vários problemas mais difíceis e resultados mais profundos envolvendo os conceitos de inscrição e circunscrição de quadriláteros.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.